Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://jemr.khu.ac.ir/

Finite Time Ruin Probability in the Collective Risk Model using Continuous-Time Markov Chain

Abouzar Bazyari

Department of Statistics, Faculty of Intelligent Systems Engineering and Data Science, Persian Gulf University, Bushehr, Iran. E-mail: ab_bazyari@pgu.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 18 April 2022
Received in revised form: 21 November 2022
Accepted: 5 December 2022
Published online: 29 February 2024

Keywords:
Collective risk model,
Continuous time Markov process,
Finite time ruin probability,
Probability transformation,
Risk process.

ABSTRACT

Introduction

Insurance is a means of protection from random and untoward events, which can lead to significant financial losses. It is a method of risk management, that is used in order to hedge against a contingent loss risk. Risk theory came into being and was developed in order to provide a basis for the existence and significance of the insurance system. One of the most fundamental problems in risk theory is the ruin problem. It analyzes the behavior of a stochastic process, that represents the evolution of the capital of an insurance company. The objective is to estimate the ruin probability, so that the surplus at some time becomes negative. From an insurers point of view, the surplus can be defined as initial surplus + premium income-claim payment.

The ruin probabilities of insurance risk models have been a hot topic of risk theory and actuarial mathematics. The study on the asymptotic estimates for ruin probabilities in insurance risk models with constant force of interest has achieved fruitful results. In traditional investigation of insurance risk models, interest rate is assumed to be deterministic.

Material and Methods

In this article, for the collective risk model of an insurance company with a fixed premium and a compound Poisson process in a period of time, regardless of the statistical distribution of the loss sizes, a formula for the probability of bankruptcy in finite time using the probability of offer transfer and Then, the matrix form of the proposed formula was rewritten by the transition matrix and the generator matrix of the continuous-time Markov process.

Results and discussion

Assuming that the damage sizes have exponential, normal and Pareto distributions, many paths of the collective risk process were simulated and in addition to calculating the finite time bankruptcy probabilities, unbiased confidence intervals with 95% confidence coefficient were estimated as well as bankruptcy probabilities. We calculated for the transfer and generator matrices of the Markov process.

Conclusion

In the process of collective risk for all mentioned distributions, it was observed that with the increase of initial capital, the probability of bankruptcy decreases. Also, for Pareto's heavy tail distribution, the probability of bankruptcy is higher than the other two distributions.

How to cite: Bazyari, Abouzar, (2023). Finite Time Ruin Probability in the Collective Risk Model using Continuous-Time Markov Chain. *Mathematical Researches*, 9 (4), 24 – 48.

Publisher: Kharazmi University

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

احتمال ورشکستگی زمان متناهی در مدل مخاطره جمعی شرکت بیمه با استفاده از زنجیر مارکوف زمان–پیوسته

ابوذر بازیاری

۱. گروه آمار، دانشگاه خلیج فارس، بوشهر. رایانامه: ab_bazyari@pgu.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۱/۲۹
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۱/۸/۳۰
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۹/۱۴
تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۱۲/۱۰

واژه‌های کلیدی:
احتمال ورشکستگی زمان متناهی،
احتمال انتقال،
فرایند مارکوف زمان-پیوسته،
فرایند مخاطره،
مدل مخاطره جمعی.

چکیده

توانایی در پرداخت خسارت‌های بیمه‌گذاران یکی از مباحث مهم در مدیریت شرکت‌های بیمه است. در این مقاله، مدل مخاطره جمعی شرکت بیمه با حق بیمه ثابت و دارای فرایند پواسن مرکب در یک دوره زمانی در نظر گرفته شده است. برای یک کلاس کلی از اندازه‌های خسارت با توزیع‌های دم سبک و سنگین، فرمولی برای محاسبه احتمال ورشکستگی زمان متناهی با استفاده از احتمال انتقال به‌دست آمده و سپس فرم ماتریسی فرمول ارایه شده توسط ماتریس انتقال و ماتریس مولد زنجیر مارکوف زمان-پیوسته بازنویسی شده است. همچنین با استفاده از مسیرهای شبیه‌سازی شده از فرایند مخاطره برای اندازه‌های خسارت با توزیع‌های نمایی، نرمال و پارتو با مقادیر مختلف سرمایه اولیه در زمان‌های متفاوت ضمن محاسبه احتمالات ورشکستگی زمان متناهی با این روش و یافتن فواصل اطمینان ناریب، مقادیر آنها برای هر دو ماتریس انتقال و ماتریس مولد زنجیر مارکوف برآورد شده‌اند.

استناد: بازیاری، ابوذر (۱۴۰۲). احتمال ورشکستگی زمان متناهی در مدل مخاطره جمعی شرکت بیمه با استفاده از زنجیر مارکوف زمان-پیوسته. *پژوهش‌های ریاضی*، ۹ (۴)، ۲۴ – ۴۸.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

مقدمه

بیمه یکی از فعالیت‌های مهم اقتصادی در هر کشوری است که با هدف کاهش خطر و ایجاد آرامش در بین بیمه‌گذاران بوجود آمده است. بیمه، قراردادی است که موضوع و هدف آن جبران خسارت[۱] وارده از طرف بیمه‌گر به اموال و دارایی بیمه‌گذار است. بیمه‌گر متعهد جبران خسارت و رفع بی‌تعادلی است که در پی حادثه مورد بیمه در وضع مالی بیمه‌گذار پدیدار می‌شود. ماهیت فعالیت بیمه با تمام بخش‌های دیگر اقتصادی متفاوت بوده و در این صنعت هزینه‌ها بر اساس محاسبات آماری به‌دست می‌آیند. با توجه به ماهیت خاص صنعت بیمه و وضعیت فعلی این شرکت‌ها، ضروری است تا مدیران و دست‌اندرکاران این شرکت‌ها در هر دوره‌ی زمانی از وضعیت شرکت خود اطلاع کافی و جامع داشته باشند تا بتوانند جهت دوری از ورشکستگی آن شرکت اقدامات به‌جا و درستی را انجام دهند.

شرکت‌های بیمه به لحاظ ساختاری که دارند، با مدل‌های ریاضی و آماری مدل‌بندی می‌شوند و البته تشخیص و تبیین مبانی نظری، ساختار و توزیع اندازه‌های خسارت امری ضروری می‌باشد. اما اگر در هر دوره‌ی زمانی سرمایه شرکت زیر صفر قرار بگیرد، آنگاه شرکت ورشکست شده و بنابراین شناخت جامعی از ساختار مدل شرکت بسیار مهم است. همچنین وجود ورشکستگی، شرکت‌ها را تشویق می‌کند تا سطوح بالاتری از مدیریت و نظارت را اعمال کنند تا از ورشکستگی جلوگیری کنند. ورشکستگی نشان از عملکرد منفی آن شرکت در یک دوره زمانی است و یک شرکت وقتی خود را در این وضعیت می‌بیند که مجموع بدهی‌هایش بیشتر از کل سرمایه‌اش باشد. اما آنچه از جنبه نظری دارای اهمیت است، محاسبه احتمالات ورشکستگی[۲] شرکت در یک دوره‌ی زمانی خاص است. به‌همین دلیل در دهه‌های اخیر نویسندگان زیادی تلاش کرده‌اند تا احتمال ورشکستگی را برای انواع مدل‌های مخاطره شرکت بیمه با روش‌های مختلف آنالیزی یا روش‌های عددی به‌طور دقیق یا تقریبی محاسبه کنند. در محاسبه این احتمال، اطلاع کامل از نوع توزیع آماری اندازه‌های خسارت رخداده شده، حق بیمه‌ها و مقدار سرمایه اولیه[۳] شرکت بسیار مهم است. اولین بار مفاهیم احتمالات ورشکستگی توسط [۲۶] مورد مطالعه قرار گرفت. [۱۵] نتایج بیشتری را در همین ارتباط به‌دست آورد. [۲۴] از روش شبیه‌سازی و با استفاده از زنجیرهای مارکوف[۴] احتمال ورشکستگی زمان متناهی را محاسبه کردند. [۱۶] از روش‌های آنالیزی برای محاسبه احتمال ورشکستگی در فرایند مخاطره استفاده کرد.

[۱] به بررسی مدل‌های مخاطره بیمه و کاربرد آنها پرداختند. [۱۱] تقریب‌هایی را برای احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی بدست آوردند. [۲۱] نتایج عددی را برای احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی محاسبه کردند. [۲۵] ضمن بررسی دقیق‌تر مدل مخاطره انفرادی، احتمالات ورشکستگی در آن مدل را نیز محاسبه کردند. [۱۴] با در نظر گرفتن مدل مخاطره جمعی[5] شرکت بیمه با وجود ثابت بودن نرخ حق بیمه، احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی را بطور تقریبی تعیین کردند. [۳۲] ضمن

[1]- Claim
[2]- Ruin probabilities
[3]- Initial reserve
4- Markov chain
[5]- Collective risk model

محاسبه احتمال ورشکستگی در مدل مخاطره انفرادی، تابع احتمال کسری ورشکستگی و تابع احتمال مشترک مازاد بلافاصله قبل از ورشکستگی را نیز به‌دست آوردند.

[۲] احتمال ورشکستگی در مدل مخاطره انفرادی شرکت بیمه با خسارت‌های وابسته را محاسبه کرد. [۳] احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی را با کمک فرایندهای تصادفی و معادلات دیفرانسیل محاسبه و یک فرمول صریح برای تعیین تقریب لاندبرگ در یافتن تقریبی احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی بر حسب تابع توزیع متغیرهای تصادفی تعداد خسارت‌های بیمه‌گذاران به‌دست آورد. ارزیابی دقیقی از احتمال ورشکستگی زمان متناهی همراه با مثال‌های عددی توسط [۱۹] داده شده است. [۲۰] فرمولی را برای محاسبه احتمال ورشکستگی زمان متناهی بر اساس چند جمله‌ای آپل[1] ارایه و نتایج به‌دست آمده را با مثال عددی بررسی کردند. [۱۲] به محاسبه احتمالات ورشکستگی با کمک زنجیر مارکوف پرداختند و فرمول‌های بازگشتی را برای محاسبه آنها ارایه دادند. [۲۷] مدل مخاطره جمعی را با فرض آنکه اندازه‌های خسارت و زمان‌های رخداد آنها تحت تاثیر فرایند مارکوف باشند، در نظر گرفتند و با استفاده از تبدیل لاپلاس احتمالات ورشکستگی را محاسبه کردند.

[۲۳] رفتار مجانبی احتمال ورشکستگی زمان متناهی را در برخی از مدل‌های مخاطره مورد بررسی قرار دادند. [۳۱] تقریب احتمال ورشکستگی زمان متناهی را در یک مدل مخاطره زمان-پیوسته با کمک نامساوی‌های احتمالی بدست آوردند. همچنین [۲۹] تقریب احتمال ورشکستگی زمان متناهی را در مدل مخاطره تعمیم یافته محاسبه کردند. [۱۸] به تعیین احتمال ورشکستگی زمان متناهی در مدل مخاطره زمان-گسسته با استفاده از احتمالات شرطی پرداختند. [۹] تقریبی برای احتمال ورشکستگی زمان متناهی در مدل مخاطره برای اندازه‌های خسارت مستقل از یکدیگر و با توزیع‌های زیر نمایی بدست آوردند. [۲۸] احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی را برای خسارت‌های با هر نوع توزیع آماری محاسبه کردند. [۱۷] احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی را با استفاده از روش تبدیل لاپلاس و سری‌های فوریه بدست آوردند. [۳۰] از روش بازگشتی برای محاسبه احتمال ورشکستگی استفاده کرده‌اند. همچنین [۲۲] به محاسبه احتمال ورشکستگی زمان متناهی در مدل مخاطره با روش سری‌های فوریه پرداختند.

در مقاله حاضر، احتمال ورشکستگی زمان متناهی در مدل مخاطره جمعی با استفاده از زنجیر مارکوف زمان-پیوسته و بازه‌های زمانی کوچک فارغ از نوع توزیع آماری اندازه‌های خسارت محاسبه شده و همان‌طور که در بالا اشاره شد، تعیین احتمالات ورشکستگی در فرایندهای مخاطره با استفاده از زنجیرهای مارکوف تاکنون توسط تعداد کمی از نویسندگان مورد مطالعه قرار گرفته و کار انجام شده در مقاله حاضر کاملاً جدید و دارای نوآوری می‌باشد.

در بخش دوم، به ارایه تعاریف از زنجیر مارکوف، بیان مدل مخاطره جمعی شرکت بیمه و نیز احتمال ورشکستگی پرداخته شده است. در بخش سوم، احتمال ورشکستگی زمان متناهی در مدل مخاطره جمعی با حق بیمه ثابت و دارای فرایند پواسن مرکب در یک دوره زمانی برای یک کلاس کلی از اندازه‌های خسارت با توزیع‌های دم سبک و سنگین و با استفاده از ماتریس

1- Appell polynomial

انتقال[1] و ماتریس مولد فرایند مارکوف پیوسته محاسبه شده است. در بخش چهارم، برای اندازه‌های خسارت دارای توزیع‌های نمایی، نرمال و پارتو با استفاده از مسیرهای شبیه‌سازی شده از فرایند مخاطره، احتمالات ورشکستگی برای مقادیر مختلف سرمایه اولیه و حق بیمه در زمان‌های متفاوت محاسبه، فواصل اطمینان ناریب[2] برآورد شده و سپس احتمالات ورشکستگی برای هر دو ماتریس انتقال و ماتریس مولد فرایند مارکوف برآورد شده‌اند. بحث و نتیجه‌گیری در بخش پنجم داده شده است.

۱. زنجیر مارکوف و مدل مخاطره بیمه

در این بخش، به ارایه مفاهیمی از زنجیر مارکوف، احتمالات انتقال[3] در یک سیستم، تعریف مدل مخاطره جمعی، احتمال ورشکستگی زمان متناهی و زمان ورشکستگی شرکت بیمه پرداخته شده است.

۱,۱ زنجیر مارکوف: زنجیر مارکوف مدلی تصادفی برای توصیف یک توالی از اتفاقات احتمالی است که در آن احتمال هر اتفاق فقط به حالت اتفاق قبلی بستگی دارد. زنجیر مارکوف یک فرایند تصادفی بدون حافظه است، بدین معنی که توزیع احتمال شرطی حالت بعد تنها به حالت فعلی بستگی دارد و مستقل از گذشته آن است. این نوع بدون حافظه بودن خاصیت مارکوف نام دارد. چون سیستم به‌صورت تصادفی تغییر می‌کند به‌طور کلی پیش‌بینی حالت زنجیر مارکوف در نقطه‌ای خاص در آینده غیرممکن است. فرض کنید $\{X_n, n=0,1,2,\ldots\}$ یک فرایند تصادفی با مجموعه مقادیر متناهی یا شمارا باشد. اگر فرایند در زمان n در حالت i باشد، آنگاه $X_n=i$ و این فرایند با احتمال مثبت و ثابت p_{ij} به حالت j خواهد رفت.

فرایند گفته شده یک زنجیر مارکوف است، هرگاه برای حالات i_0، i_1، ...، i_n، i_{n-1} و j تساوی

$$P\left(X_{n+1}=j \middle| X_n=i_n, X_{n-1}=i_{n-1},\ldots, X_1=i_1, X_0=i_0\right)=p_{ij},$$

برقرار باشد. مقدار p_{ij} را احتمال انتقال از حالت i به حالت j گویند. ماتریسی که شامل تمام این مقادیر احتمال است را ماتریس انتقال می‌گویند که در این مقاله با نماد A نشان داده می‌شود. کاملاً بدیهی است که در حالت زمان-پیوسته

$$A(0)=\lim_{t\to 0} A(t)=I,$$

می‌باشد، که در آن I یک ماتریس همانی[4] است. همچنین $A'(0)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{A(\varepsilon)-I}{\varepsilon}=Q$ است، که Q ماتریس مولد زنجیر مارکوف بوده و عناصر آن به‌صورت

1- Transformation matrix
2- Unbiased confidence intervals
3- Probability transformation
4- Identity matrix

$$Q=\begin{pmatrix} q_{۰,۰} & q_{۰,۱} & q_{۰,۲} & q_{۰,۳} & \cdots \\ q_{۱,۰} & q_{۱,۱} & q_{۱,۲} & q_{۱,۳} & \cdots \\ q_{۲,۰} & q_{۲,۱} & q_{۲,۲} & q_{۲,۳} & \cdots \\ q_{۳,۰} & q_{۳,۱} & q_{۳,۲} & q_{۳,۳} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ q_{u,۰} & q_{u,۱} & q_{u,۲} & q_{u,۳} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix},$$

هستند. مجموع تمام عناصر در هر ردیف از ماتریس Q برابر با صفر است. همچنین

$$\sum_{j=۰,\, j\neq i}^{d-۱} q_{i,j} = -q_{i,i}, \qquad q_{i,j} = \lim_{\varepsilon\to ۰}\frac{A_{i,j}(\varepsilon)}{\varepsilon} \geq ۰,$$

و $q_{i,i} \leq ۰$ می‌باشند. بنابراین برای مقدار ε کوچک و $i \neq j$ تساوی

$$A_{i,j} = q_{i,j}\varepsilon + O(\varepsilon), \tag{۱}$$

برقرار بوده و همچنین $A_{i,i} = q_{i,i}\varepsilon + O(\varepsilon)$ است. لازم به ذکر است که در نظریه احتمال، زنجیر مارکوف جذب کننده، زنجیر مارکوفی است که در آن هر حالت می‌تواند به یک حالت جاذب برسد. حالت جاذب حالتی است که پس از وارد شدن به آن نمی‌توان از آن خارج شد.

۲.۱. مدل مخاطره جمعی شرکت بیمه: فرایند مخاطره تجدید به‌عنوان مدل مخاطره جمعی نقشی مهم و اساسی در نظریه مخاطره دارد. در حقیقت این فرایند، ساختار مالی شرکت بیمه را در یک دوره زمانی مشخص می‌کند و در بسیاری از حالات فرض استقلال بین اندازه‌های خسارت و نیز استقلال بین اندازه‌های خسارت و زمان‌های رخداد آنها برقرار است. اگرچه در حالات وابستگی نیز این مدل‌ها واقعی‌تر بوده و نیاز به محاسبه دقیق یا تقریبی احتمالات ورشکستگی است (برای اطلاعات بیشتر به [۱۰] ، [۷]، [۶]، [۱۳] و [۸] رجوع شود).

با توجه به ساختار شرکت بیمه، مدل‌های مخاطره متفاوتی برای ساختاربندی آن وجود دارد. در این مقاله، فرایند مخاطره شرکت به‌صورت

$$R(t) = u + ct - S(t), \tag{۲}$$

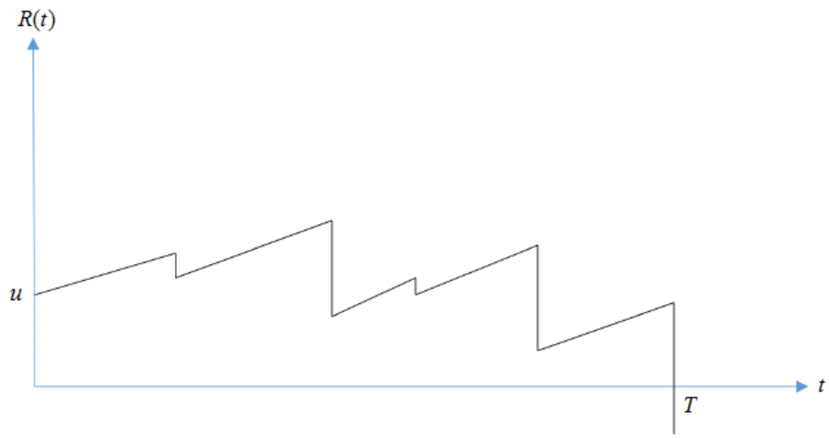
تعریف می‌شود، که در این مدل u سرمایه اولیه، ct مجموع حق بیمه‌های دریافتی تا زمان t، $\{X_k, k=۱,۲,\ldots\}$ دنباله متغیرهای تصادفی اندازه‌های خسارت با تابع توزیع مشترک $F(x)$، $S(t)=\sum_{k=۱}^{N(t)} X_k$ فرایند تصادفی مجموع خسارت‌ها و

$\{T_k, k=1,2,\ldots\}$ دنباله متغیرهای تصادفی زمان‌های رخداد بین خسارت‌ها بوده که از هم مستقل هستند و دارای فرایند تجدید $N(t)=\sup\{m\in N: T_m\le t\}$، $t\ge 0$، می‌باشند. همچنین فرض می‌شود که فرایند $\{N(t); t\ge 0\}$ یک فرایند پواسون با پارامتر λ است.

اگر $\lambda(t)$ تابع میانگین فرایند $N(t)$ باشد، آنگاه

$$\lambda(t)=E(N(t))=\sum_{i=1}^{\infty}P(T_i\le t),\qquad t\ge 0$$

خواهد بود. همچنین فرض می‌شود که اندازه‌های خسارت دارای یک کلاس کلی از توزیع‌های دم سبک و سنگین باشند که در مثال‌های شبیه‌سازی شده در بخش چهارم توزیع‌های نمایی، نرمال و پارتو در نظر گرفته شده‌اند. نمودار فرایند مدل مخاطره (۲) در شکل ۱ داده شده است.



شکل ۱. فرایند مدل مخاطره جمعی شرکت بیمه

در بازه زمانی $[0,t]$ ورشکستگی وقتی رخ می‌دهد که مجموع سرمایه‌های آن شرکت زیر صفر قرار بگیرد، یعنی در حقیقت مجموع خسارت‌های رخداده شده از طرف بیمه‌گذاران بیشتر از مقدار مبلغ جمع‌آوری شده توسط آن شرکت باشد. به محض آنکه سرمایه شرکت زیر صفر قرار بگیرد، ورشکستگی اتفاق می‌افتد. بنابراین احتمال ورشکستگی در بازه زمانی $[0,t]$ به‌صورت

$$P_u(T<t)=\psi(u,t)=P\left(\inf_{0\le s\le t}R(s)<0\,\middle|\,R(0)=u\right),\qquad (3)$$

تعریف می‌شود. احتمال بقا[1] عبارت است از $\phi(u,t)=1-\psi(u,t)$ و با نماد $P_u(T>t)$ نشان داده می‌شود. برای یک فرایند مخاطره با سرمایه اولیه u، زمان ورشکستگی آن فرایند با نماد T_u نشان داده و عبارت است از:

1- Survival probability

$$T_u = \min\{t \mid t \geq ۰, R(t) < ۰\}.$$

در حقیقت زمان ورشکستگی، کمترین مقداری از زمان است که فرایند در آن زمان زیر صفر قرار بگیرد. اگر برای تمام $t > ۰$ ، $R(t) \geq ۰$ باشد، ورشکستگی رخ نمی‌دهد، یعنی $T_u = \infty$ است. در این مقاله، هدف محاسبه احتمال ورشکستگی زمان متناهی رابطه (۳) با استفاده زنجیرهای مارکوف و نیز برآورد فواصل اطمینان احتمال ورشکستگی می‌باشد.

۲. احتمال ورشکستگی زمان متناهی در مدل مخاطره جمعی

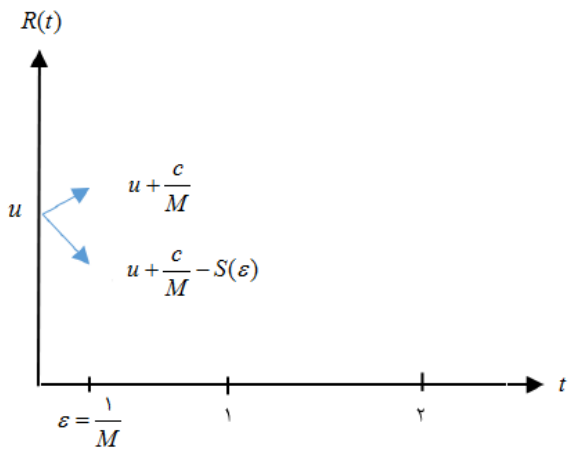
محاسبه احتمال ورشکستگی یک شرکت بیمه این امکان را به مدیر یا مدیران آن شرکت می‌دهد تا بتوانند تصمیمات درست و منطقی در پیش‌برد اهداف آینده شرکت داشته باشند. در این بخش، احتمال ورشکستگی زمان متناهی مدل (۲) محاسبه شده است.

قضیه ۱. برای مدل مخاطره (۲) که $u + \frac{c}{M} - w > ۰$ و $\varepsilon = \frac{۱}{M}$، احتمال بقا عبارت است از:

$$P_u(T > t) = \sum_{w=۰}^{n} P\left(u \to u + \frac{c}{M} - w\right) P_{u+\frac{c}{M}-w}(T > t - \varepsilon), \tag{۴}$$

که در آن $P\left(u \to u + \frac{c}{M} - w\right)$ احتمال انتقال از u به $u + \frac{c}{M} - w$ می‌باشد.

اثبات. برای محاسبه این احتمال ابتدا توجه کنید که با شروع فرایند مخاطره بعد از گذشت زمان بسیار کوچک به اندازه ε ممکن است مقدار سرمایه مالی شرکت تغییر کند و این تغییر سرمایه بستگی به مقدار اندازه‌های خسارت دارد. اگر $S(\varepsilon) = w$ مجموع خسارت‌های رخ‌داده شده تا زمان ε باشد، تغییر سرمایه شرکت در شکل ۲ داده شده است.



شکل ۲. مقدار سرمایه اولیه در انتهای بازه زمانی کوچک به اندازه ε

فرض می‌شود که این فرایند برای زمان بعدی بسیار کوچک به اندازه ε نیز تکرار شود. اگر $S(\varepsilon)=w$ مقادیر صحیح بین ۰ و n را اختیار کند، آنگاه برای $u+\frac{c}{M}-w>0$ و $\varepsilon=\frac{1}{M}$، احتمال بقا عبارت است از:

$$P_u(T>t)=\sum_{w=0}^{n}P\left(u\to u+\frac{c}{M}-w\right)P_{u+\frac{c}{M}-w}\left(T>t-\varepsilon\right),$$

که در آن $P\left(u\to u+\frac{c}{M}-w\right)$ احتمال انتقال از u به $u+\frac{c}{M}-w$ می‌باشد و این اثبات را کامل می‌کند.

لازم به یادآوری است که با توجه به فرمول (۴)، احتمال ورشکستگی عبارت است از:

$$.\ P_u(T<t)=1-P_u(T>t)$$

تذکر. محاسبه مقدار $P\left(u\to u+\frac{c}{M}-w\right)$ در رابطه (۴) دارای اهمیت است. مقدار آن برای $w\geq 1$ عبارت است از:

$$\begin{aligned}P\left(u\to u+\frac{c}{M}-w\right)&=P\left(R(\varepsilon)=u+\frac{c}{M}-w\middle|R(0)=u\right)\\&=\frac{e^{-\lambda\varepsilon}\,\lambda\varepsilon}{1!}P(X_1=w)+\frac{e^{-\lambda\varepsilon}\,(\lambda\varepsilon)^2}{2!}P(X_1+X_2=w)\\&\quad+\frac{e^{-\lambda\varepsilon}\,(\lambda\varepsilon)^3}{3!}P(X_1+X_2+X_3=w)+\cdots,\end{aligned}\tag{۵}$$

و برای $w=0$ خواهیم داشت:

$$P\left(u\to u+\frac{c}{M}\right)=e^{-\lambda\varepsilon}.\tag{۶}$$

بنا به رابطه (۴) برای تعیین احتمال بقا، ابتدا بایستی احتمال انتقال از u به $u+\frac{c}{M}-w$ محاسبه شود و این نیاز به دانستن توزیع آماری اندازه‌های خسارت رخداده شده از طرف بیمه‌گذاران است. برای مقادیر سرمایه اولیه $u=1,2,3,\ldots,k$، احتمال بقای $P_u(T>t)$ به‌صورت مجموعی با ضرایب احتمالات انتقال نوشته شده و در جدول ۱ داده شده‌اند.

$P_u(T>t)$	u
$\sum_{w=۰}^{n} P\left(۱ \to ۱+\frac{c}{M}-w\right) P_{۱+\frac{c}{M}-w}\left(T>t-\varepsilon\right)$	۱
$\sum_{w=۰}^{n} P\left(۲ \to ۲+\frac{c}{M}-w\right) P_{۲+\frac{c}{M}-w}\left(T>t-\varepsilon\right)$	۲
$\sum_{w=۰}^{n} P\left(۳ \to ۳+\frac{c}{M}-w\right) P_{۳+\frac{c}{M}-w}\left(T>t-\varepsilon\right)$	۳
$\vdots$	$\vdots$
$\sum_{w=۰}^{n} P\left(k \to k+\frac{c}{M}-w\right) P_{k+\frac{c}{M}-w}\left(T>t-\varepsilon\right)$	k

جدول ۱. احتمال بقا برای مقادیر سرمایه اولیه به‌صورت مجموعی با ضرایب احتمالات انتقال

در حقیقت محاسبه این احتمالات برای هر مقدار از سرمایه اولیه و مقادیر $w=۰,۱,\dots,n$ به‌دست می‌آیند. چون فرایند مخاطره برای زمان بعدی بسیار کوچک به اندازه ε تکرار می‌شود، بنابراین رابطه (۴) نیز برای $P_u(T>t-\varepsilon)$ برقرار است و در نتیجه

$$P_u(T>t-\varepsilon)=\sum_{w=۰}^{n} P\left(u \to u+\frac{c}{M}-w\right) P_{u+\frac{c}{M}-w}\left(T>t-۲\varepsilon\right), \quad (۷)$$

خواهد بود. به‌همین ترتیب با توجه به محاسبه روابط (۴) و (۷)، برای بازه‌های بسیار کوچک بعدی این فرمول‌ها قابل تکرار خواهند بود. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱. فرض کنید $u=۱۰$، $c=۲$ و $M=۱$ باشد. آنگاه بنا به رابطه (۴)، احتمال بقا عبارت است از:

$$P_{۱۰}(T>t)=\sum_{w=۰}^{n} P\left(۱۰ \to ۱۲-w\right) P_{۱۲-w}\left(T>t-\varepsilon\right), \quad (۸)$$

و البته برای محاسبه مقدار سمت راست تساوی (۸)، یکی از احتمالاتی که لازم است مشخص شود، مقدار $P_{۱۲}(T>t-\varepsilon)$ است که از رابطه (۷) برای محاسبه آن استفاده می‌شود. برای اجتناب از محاسبات طولانی، نوشتن و بازنویسی فرمول احتمال بقا در فرم ماتریسی پیشنهاد می‌شود.

با استفاده از ماتریس انتقال و ماتریس مولد فرایند مارکوف زمان-پیوسته، این فرمول‌ها در فرم ماتریسی برای مقادیر سرمایه اولیه $u=1,2,3,\ldots,k$ نوشته شده‌اند. اگرچه برای تمام مقادیر سرمایه اولیه شامل تمام اعداد صحیح این فرم ماتریسی نیز برقرار خواهد بود. احتمال ورشکستگی زمان متناهی داده شده در رابطه (۴) برای $M=1$ در فرم ماتریسی به‌صورت

$$\begin{pmatrix} p_{0,0} & p_{0,1} & p_{0,2} & p_{0,3} & \cdots \\ p_{1,0} & p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} & \cdots \\ p_{2,0} & p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} & \cdots \\ p_{3,0} & p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ p_{u,0} & p_{u,1} & p_{u,2} & p_{u,3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0(T>t-\varepsilon) \\ P_1(T>t-\varepsilon) \\ P_2(T>t-\varepsilon) \\ P_3(T>t-\varepsilon) \\ \vdots \\ P_u(T>t-\varepsilon) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0(T>t) \\ P_1(T>t) \\ P_2(T>t) \\ P_3(T>t) \\ \vdots \\ P_u(T>t) \\ \vdots \end{pmatrix}, \tag{۹}$$

نوشته می‌شود. رابطه ماتریسی (۹) به فرم

$$A\,f(t-\varepsilon)=f(t), \tag{۱۰}$$

بازنویسی شده، که در آن

$$A=\begin{pmatrix} p_{0,0} & p_{0,1} & p_{0,2} & p_{0,3} & \cdots \\ p_{1,0} & p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} & \cdots \\ p_{2,0} & p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} & \cdots \\ p_{3,0} & p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ p_{u,0} & p_{u,1} & p_{u,2} & p_{u,3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix}, \qquad f(t-\varepsilon)=\begin{pmatrix} P_0(T>t-\varepsilon) \\ P_1(T>t-\varepsilon) \\ P_2(T>t-\varepsilon) \\ P_3(T>t-\varepsilon) \\ \vdots \\ P_u(T>t-\varepsilon) \\ \vdots \end{pmatrix},$$

و $f(t)=\begin{pmatrix} P_0(T>t) \\ P_1(T>t) \\ P_2(T>t) \\ P_3(T>t) \\ \vdots \\ P_u(T>t) \\ \vdots \end{pmatrix}$ می‌باشد. در تساوی (۱۰)، ماتریس A ماتریس انتقال بوده و شامل عناصر $p_{i,j}=P(i\to j)$ است. در این مقاله، فرض می‌شود که در ماتریس انتقال A حالت صفر حالت جذب باشد، بنابراین کاملاً بدیهی است که

$P_{۰}(T>t)=P_{۰}(T>t-\varepsilon)=۰$ می‌باشد. برای محاسبه احتمال بقا در رابطه (۴) لازم است که با توجه به توزیع اندازه‌های خسارت، عناصر ماتریس انتقال A برآورد شوند. چون $N(t)$ یک فرایند پواسن با پارامتر λ بوده، بنابراین

$$P\left(N(t)=k\right)=\frac{e^{-\lambda t}}{k!}(\lambda t)^{k}, \qquad k=۰,۱,۲,\cdots$$

می‌باشد.

برای مقادیر کوچک ε و λ، چون $\lambda\varepsilon e^{-\lambda\varepsilon}=\lambda\varepsilon\left(۱+(-\lambda\varepsilon)+\frac{(\lambda\varepsilon)^{۲}}{۲!}+\frac{(-\lambda\varepsilon)^{۳}}{۳!}+\cdots\right)\approx\lambda\varepsilon$ است، آنگاه احتمال اینکه فرایند تعداد خسارت‌ها برابر با یک باشد، عبارت است از:

$$P\left(N(t)=۱\right)=e^{-\lambda\varepsilon}\lambda\varepsilon\approx\lambda\varepsilon,$$

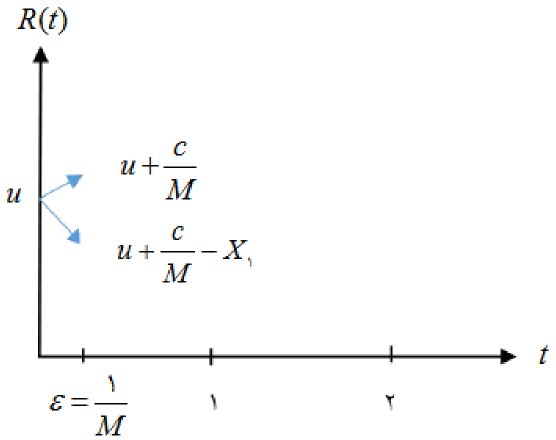
و نیز $P\left(N(t)=۰\right)=e^{-\lambda\varepsilon}\approx ۱-\lambda\varepsilon$ خواهد بود. حال اگر مجموع خسارت‌های رخداده شده در یک بازه کوچک ε برابر با $X_{۱}$ باشد، یعنی $S(\varepsilon)=X_{۱}$، آنگاه

$$P\left(u\rightarrow u+\frac{c}{M}\right)=۱-e^{-\lambda\varepsilon}\lambda\varepsilon\approx ۱-\lambda\varepsilon=(M-\lambda)\varepsilon,$$

و

$$P\left(u\rightarrow u+\frac{c}{M}-X_{۱}\right)=e^{-\lambda\varepsilon}\lambda\varepsilon P(X_{۱})\approx\lambda\varepsilon P(X_{۱}),$$

به‌دست می‌آیند. حالت فرایند مخاطره بعد از گذشت زمان کوچک به اندازه ε در شکل ۳ نشان داده شده است.



شکل ۳. مقدار سرمایه اولیه در انتهای بازه زمانی کوچک به اندازه ε

برای مثال، اگر متغیر تصادفی $X_۱$ مقادیر صحیح بین ۱ و k را با $P\left(X_۱ = w\right) = \frac{۱}{k}$ اختیار کند، آنگاه برای تمام مقادیر $۱ \le w \le k$، احتمالات انتقال از u به $u+\frac{c}{M}-۱$، $u+\frac{c}{M}-۲$، ... و $u+\frac{c}{M}-k$ عبارتند از:

$$P\left(u \to u+\frac{c}{M}-۱\right) = \frac{\lambda\varepsilon}{k},$$
$$P\left(u \to u+\frac{c}{M}-۲\right) = \frac{\lambda\varepsilon}{k},$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$P\left(u \to u+\frac{c}{M}-k\right) = \frac{\lambda\varepsilon}{k}.$$

بنابراین احتمال بقا در رابطه (۴) به‌صورت مجموع

$$\begin{aligned} P_u(T>t) &= P\left(u \to u+\frac{c}{M}\right)P_{u+\frac{c}{M}}\left(T>t-\varepsilon\right) \\ &+ P\left(u \to u+\frac{c}{M}-۱\right)P_{u+\frac{c}{M}-۱}\left(T>t-\varepsilon\right) \\ &+ P\left(u \to u+\frac{c}{M}-۲\right)P_{u+\frac{c}{M}-۲}\left(T>t-\varepsilon\right) \\ &\vdots \\ &+ P\left(u \to u+\frac{c}{M}-k\right)P_{u+\frac{c}{M}-k}\left(T>t-\varepsilon\right), \end{aligned}$$

محاسبه می‌شود و در فرم ماتریسی، خواهیم داشت:

$$A_{ij} = P\left(R(\varepsilon) = u+\frac{c}{M} \middle| R(\cdot) = u\right) = (M-\lambda)\varepsilon,$$

که در نتیجه برای $j > i$ ، با توجه به رابطه (۱)، $q_{ij} = (M-\lambda)$ است. همچنین

$$A_{ij} = P\left(R(\varepsilon) = u+\frac{c}{M}-w \middle| R(\cdot) = u\right) = P\left(X_۱ = w\right)\lambda\varepsilon,$$

بوده که در نتیجه برای $j > i$ ، با توجه به رابطه (۱)، $q_{ij} = P\left(X_۱ = w\right)\lambda$ است.

مثال ۲. فرض کنید $c=۱$ و $\varepsilon=۰/۰۱$، $(M=۱۰۰)$ و متغیر تصادفی اندازه خسارت مقادیر ۱، ۲ و ۳ را به‌ترتیب با احتمالات $p_۱$، $p_۲$ و $p_۳$ اختیار کند. آنگاه برای λ کوچک، احتمالات انتقال از u به $u+c\varepsilon-۱$، $u+c\varepsilon-۲$، ... و $u+c\varepsilon-k$ عبارتند از:

$$p_۱=P\left(u\to u+c\varepsilon-۱\right)=\frac{e^{-\lambda\varepsilon}\lambda\varepsilon}{۳}\approx\frac{\lambda\varepsilon}{۳},$$
$$p_۲=P\left(u\to u+c\varepsilon-۲\right)=\frac{e^{-\lambda\varepsilon}\lambda\varepsilon}{۳}\approx\frac{\lambda\varepsilon}{۳},$$
$$p_۳=P\left(u\to u+c\varepsilon-۳\right)=\frac{e^{-\lambda\varepsilon}\lambda\varepsilon}{۳}\approx\frac{\lambda\varepsilon}{۳}.$$

همچنین احتمال آنکه خسارتی رخ ندهد برابر است با:

$$p=۱-p_۱-p_۲-p_۳=P\left(u\to u+c\varepsilon\right)=۱-e^{-\lambda\varepsilon}\lambda\varepsilon\approx(M-\lambda)\varepsilon,$$

و نیز $p+p_۱+p_۲+p_۳=۱$ است. عناصر ماتریس انتقال در بازه زمانی ε شامل اعداد ۰، p، $p_۱$، $p_۲$ و $p_۳$ می‌باشند. برای سرمایه اولیه $u=۰,۰/۰۱,۰/۰۲,۰/۰۳,\ldots,۱,۱/۰۱,۱/۰۲,\ldots,۳/۰۱,۳/۰۲$، تساوی (۹) و ماتریس احتمال انتقال به‌صورت

$$\begin{pmatrix}
۱ & ۰ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
۱-p & p & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
۱-p & ۱-p & p & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\
۱-p & ۱-p & ۱-p & \cdots p & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\
p_۲+p_۳ & p_۱ & \cdots & \cdots & \cdots p & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\
p_۲+p_۳ & p_۱ & \cdots & \cdots & p_۱ \cdots & \cdots p & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\
p_۳ & p_۲ & \cdots & \cdots & \cdots & p_۱ & \cdots \cdots p & \cdots & \cdots & \cdots & & \\
p_۳ & p_۲ & \cdots & \cdots & \cdots & & p_۱ & \cdots \cdots p & \cdots & \cdots & \cdots & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\
p_۳ & p_۲ & \cdots & \cdots & \cdots & & & p_۱ & \cdots \cdots p & \cdots & & \\
p_۳ & p_۲ & \cdots & \cdots & \cdots & & & & p_۱ & \cdots \cdots p & \cdots & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & &
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
P_۰(T>t-۰/۰۱) \\ P_{۰/۰۱}(T>t-۰/۰۱) \\ P_{۰/۰۲}(T>t-۰/۰۱) \\ \vdots \\ P_{۰/۹۹}(T>t-۰/۰۱) \\ P_۱(T>t-۰/۰۱) \\ P_{۱/۰۱}(T>t-۰/۰۱) \\ \vdots \\ P_{۲/۹۹}(T>t-۰/۰۱) \\ P_۳(T>t-۰/۰۱) \\ P_{۳/۰۱}(T>t-۰/۰۱) \\ \vdots
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
P_۰(T>t) \\ P_{۰/۰۱}(T>t) \\ P_{۰/۰۲}(T>t) \\ \vdots \\ P_{۰/۹۹}(T>t) \\ P_۱(T>t) \\ P_{۱/۰۱}(T>t) \\ \vdots \\ P_{۲/۹۹}(T>t) \\ P_۳(T>t) \\ P_{۳/۰۱}(T>t) \\ \vdots
\end{pmatrix},$$

خواهد بود.

مثال ۳. داده‌های مثال ۵ داده شده در [۵] که مربوط به شرکت بیمه معلم شهرستان بوشهر است را در نظر بگیرید. در این مثال، حق بیمه دریافتی از بیمه‌گذاران ۱۴۰۰۰۰۰ تومان، متغیرهای تصادفی اندازه‌های خسارت دارای توزیع نمایی با میانگین

۶۰۰۰۰۰ تومان بوده و نیز نشان داده شده که تعداد خسارت‌ها دارای توزیع پواسن هستند. با فرض آنکه w مقادیر عددی بین صفر تا ۳ را اختیار کند، احتمالات ورشکستگی با $M=۱۰۰$ برای مقادیر مختلف سرمایه اولیه با استفاده از فرمول (۴) محاسبه و نتایج در جدول ۲ گزارش شده‌اند. مقدار $P\left(u\to u+\dfrac{c}{M}-w\right)$ برای سرمایه‌های اولیه مختلف و $w=۰$ با استفاده از فرمول (۵) و برای $w\geq ۱$ با استفاده از فرمول (۶) محاسبه شده است.

جدول ۲. احتمالات ورشکستگی زمان متناهی شرکت بیمه معلم شهرستان بوشهر

u	۵	۵	۵	۵	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰
t	۵۰	۱۰۰	۱۵۰	۲۰۰	۵۰	۱۰۰	۱۵۰	۲۰۰
احتمال ورشکستگی برای $w=۰$	۰/۱۰۴	۰/۱۵۲	۰/۱۹۶	۰/۲۰۵	۰/۰۹۱	۰/۱۱۸	۰/۱۲۰	۰/۱۸۵
احتمال ورشکستگی برای $w=۱$	۰/۱۳۵	۰/۱۸۴	۰/۲۱۰	۰/۲۲۶	۰/۱۰۸	۰/۱۴۵	۰/۱۷۹	۰/۲۱۴
احتمال ورشکستگی برای $w=۲$	۰/۱۵۲	۰/۲۰۳	۰/۲۴۴	۰/۲۵۷	۰/۱۲۹	۰/۱۷۳	۰/۱۹۲	۰/۲۵۵
احتمال ورشکستگی برای $w=۳$	۰/۱۸۱	۰/۲۴۹	۰/۲۹۵	۰/۳۱۲	۰/۱۶۰	۰/۲۰۷	۰/۲۳۴	۰/۲۸۵

ادامه جدول

u	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۳۰	۳۰	۳۰	۳۰
t	۵۰	۱۰۰	۱۵۰	۲۰۰	۵۰	۱۰۰	۱۵۰	۲۰۰
احتمال ورشکستگی برای $w=۰$	۰/۰۴۱	۰/۰۹۲	۰/۱۰۷	۰/۱۲۲	۰/۰۰۸	۰/۰۳۵	۰/۰۸۴	۰/۱۰۱
احتمال ورشکستگی برای $w=۱$	۰/۰۸۶	۰/۱۱۵	۰/۱۳۶	۰/۱۶۴	۰/۰۲۷	۰/۰۹۸	۰/۱۰۵	۰/۱۳۰
احتمال ورشکستگی برای $w=۲$	۰/۱۱۲	۰/۱۶۰	۰/۱۷۵	۰/۱۹۱	۰/۰۷۰	۰/۱۲۵	۰/۱۶۲	۰/۱۸۰
احتمال ورشکستگی برای $w=۳$	۰/۱۵۵	۰/۲۰۳	۰/۲۲۰	۰/۲۵۶	۰/۰۹۲	۰/۱۷۷	۰/۲۰۶	۰/۲۲۷

همان‌طور که ملاحظه می‌شود در هر سطح از زمان با افزایش سرمایه اولیه شرکت، احتمال ورشکستگی کاهش می‌یابد.

۳. شبیه‌سازی احتمالات ورشکستگی

در این بخش، احتمالات ورشکستگی مدل فرایند مخاطره رابطه (۲) برای اندازه‌های خسارت با توزیع‌های نمایی با پارامتر ۱۰، نرمال $N(۲,۳)$ و پارتو $P_{ar}(۲,۱/۵)$ برای مقادیر مختلف سرمایه اولیه و حق بیمه در زمان‌های متفاوت شبیه‌سازی شده، فواصل اطمینان نااریب برای احتمال ورشکستگی محاسبه و نیز احتمالات ورشکستگی زمان متناهی برای هر دو ماتریس انتقال و ماتریس مولد فرایند مارکوف برآورد شده‌اند.

۴-۱. مسیرهای شبیه‌سازی شده و فواصل اطمینان نااریب

روش به این صورت است، که حق بیمه برابر با ۲ و سرمایه اولیه $u = ۵,۱۰,۲۰,۳۰$ در زمان‌های $t = ۵۰,۱۰۰,۱۵۰,۲۰۰$ در نظر گرفته شده است. برای هر کدام از توزیع‌های آماری گفته شده، با توجه به مقدار سرمایه اولیه ثابت مسیرهای متفاوتی در نظر گرفته شده است (تعداد مسیرها ۲۰۰۰ تا می‌باشد)، آنگاه با توجه به فرایند مخاطره (۲) تعداد آن مسیرهایی را که تا زمان t زیر صفر قرار گرفته‌اند (یعنی منجر به ورشکستگی شده‌اند) به تعداد کل مسیرها تقسیم شده و مقدار احتمال ورشکستگی به‌دست می‌آید. بنابراین برای هر توزیع، برآورد احتمال ورشکستگی زمان متناهی عبارت است از:

$$\hat{P}_u(T<t) = \frac{۱}{L}\sum_{k=۱}^{L} I_k(T<t), \qquad (۱۱)$$

که در آن $I_k(.)$ تابع نشانگر احتمال ورشکستگی برای kامین مسیر و T زمان ورشکستگی می‌باشد. آنگاه بنا به فرمول (۸) داده شده در [۲] یک فاصله اطمینان با ضریب $۱-\alpha$ درصد برای احتمال ورشکستگی زمان متناهی به‌صورت

$$\hat{P}_u(T<t) \pm Z_{\frac{\alpha}{۲}}\sqrt{\frac{۱}{L}\left(\hat{P}_u(T<t) - \hat{P}_u^{۲}(T<t)\right)}, \qquad (۱۲)$$

می‌باشد. برای هر کدام از توزیع‌های ذکر شده، احتمالات ورشکستگی برآورد و فواصل اطمینان با ضریب اطمینان ۰/۹۵ طبق رابطه (۱۲) محاسبه شده و نتایج در جداول ۳، ۴، ۵ و ۶ آورده شده‌اند. نمودارهای هم‌زمان برآورد احتمالات ورشکستگی و فواصل اطمینان برای اندازه‌های خسارت نمایی، نرمال و پارتو با سرمایه اولیه متفاوت رسم و در شکل‌های ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹ نشان داده شده‌اند.

جدول ۳. احتمالات ورشکستگی مدل مخاطره جمعی برای اندازه‌های خسارت نمایی

u	۵	۵	۵	۵	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰
t	۵۰	۱۰۰	۱۵۰	۲۰۰	۵۰	۱۰۰	۱۵۰	۲۰۰
احتمال ورشکستگی	۰/۳۶۲	۰/۴۲۵	۰/۴۷۶	۰/۵۳۷	۰/۳۰۵	۰/۳۸۰	۰/۴۲۳	۰/۴۸۰

ادامه جدول

u	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۳۰	۳۰	۳۰	۳۰
t	۵۰	۱۰۰	۱۵۰	۲۰۰	۵۰	۱۰۰	۱۵۰	۲۰۰
احتمال ورشکستگی	۰/۲۷۱	۰/۳۴۷	۰/۳۷۶	۰/۴۵۱	۰/۲۳۸	۰/۳۱۱	۰/۳۳۹	۰/۴۰۷

جدول ۴. احتمالات ورشکستگی مدل مخاطره جمعی برای اندازه‌های خسارت نرمال

u	۵	۵	۵	۵	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰
t	۵۰	۱۰۰	۱۵۰	۲۰۰	۵۰	۱۰۰	۱۵۰	۲۰۰
احتمال ورشکستگی	۰/۵۳۶	۰/۵۶۲	۰/۶۰۴	۰/۶۴۹	۰/۵۱۰	۰/۵۳۳	۰/۵۷۱	۰/۶۲۴

ادامه جدول

u	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۳۰	۳۰	۳۰	۳۰
t	۵۰	۱۰۰	۱۵۰	۲۰۰	۵۰	۱۰۰	۱۵۰	۲۰۰
احتمال ورشکستگی	۰/۴۷۷	۰/۴۹۲	۰/۵۳۰	۰/۵۸۶	۰/۴۲۷	۰/۴۶۱	۰/۴۸۲	۰/۵۳۰

جدول ۵. احتمالات ورشکستگی مدل مخاطره جمعی برای اندازه‌های خسارت پارتو

u	۵	۵	۵	۵	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰
t	۵۰	۱۰۰	۱۵۰	۲۰۰	۵۰	۱۰۰	۱۵۰	۲۰۰
احتمال ورشکستگی	۰/۷۸۶	۰/۸۱۱	۰/۸۴۰	۰/۸۷۳	۰/۷۵۱	۰/۷۹۱	۰/۸۱۶	۰/۸۵۵

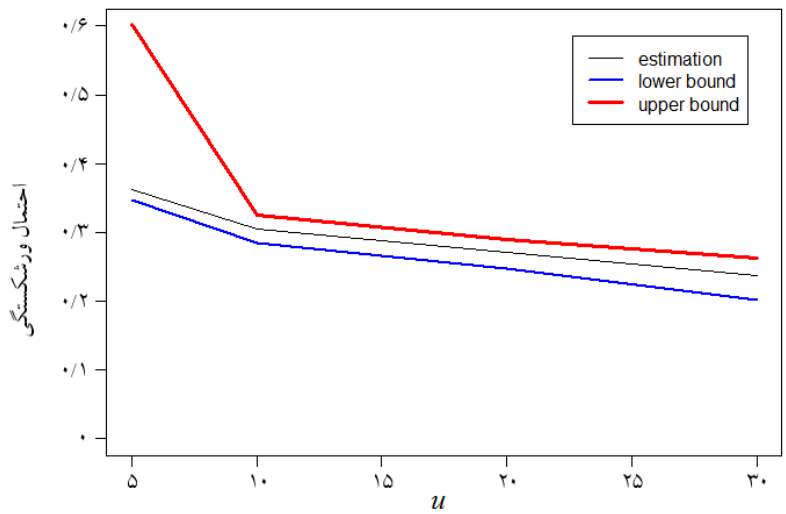
ادامه جدول

u	۵	۵	۵	۵	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰
t	۵۰	۱۰۰	۱۵۰	۲۰۰	۵۰	۱۰۰	۱۵۰	۲۰۰
احتمال ورشکستگی	۰/۷۲۴	۰/۷۷۳	۰/۷۸۱	۰/۸۳۲	۰/۶۹۵	۰/۷۴۶	۰/۷۶۰	۰/۷۹۱

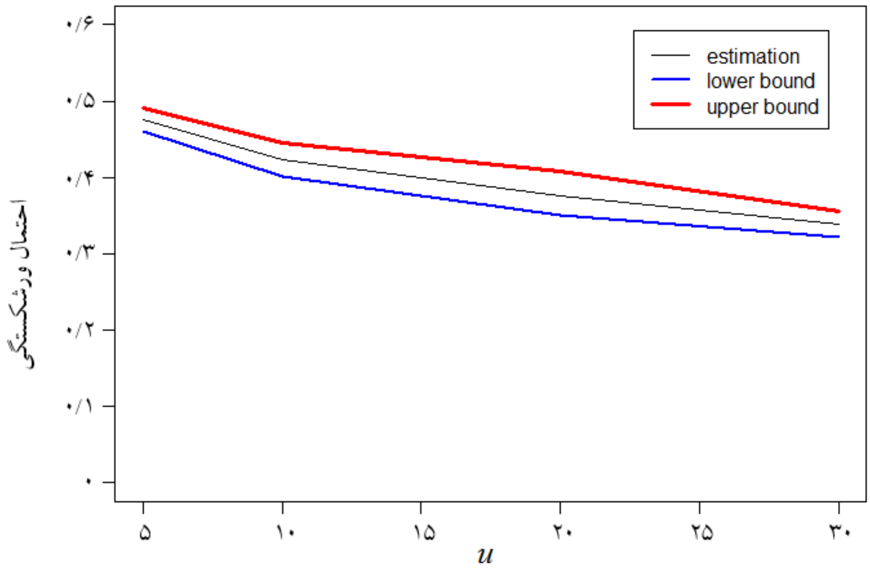
جدول ۶. فواصل اطمینان با ضریب ۰/۹۵ برای احتمال ورشکستگی برای اندازه‌های خسارت نمایی، نرمال و پارتو

u	۵	۵	۱۰	۱۰
t	۵۰	۱۵۰	۵۰	۱۵۰
فاصله اطمینان برای احتمال ورشکستگی با خسارت نمایی	(۰/۳۴۶۹ و ۰/۶۰۱۸)	(۰/۴۶۰۳ و ۰/۴۹۱۶)	(۰/۲۸۴۸ و ۰/۳۲۵۲)	(۰/۴۰۱۳ و ۰/۴۴۴۶)
فاصله اطمینان برای احتمال ورشکستگی با خسارت نرمال	(۰/۵۱۴۱ و ۰/۵۵۷۸)	(۰/۵۸۲۵ و ۰/۶۲۵۴)	(۰/۴۸۸۰ و ۰/۵۳۱۹)	(۰/۵۴۹۳ و ۰/۵۹۲۶)
فاصله اطمینان برای احتمال ورشکستگی با خسارت پارتو	(۰/۷۶۸۰ و ۰/۸۰۳۹)	(۰/۸۲۳۹ و ۰/۸۵۶۰)	(۰/۷۳۲۰ و ۰/۷۶۹۹)	(۰/۷۹۹۰ و ۰/۸۳۲۹)

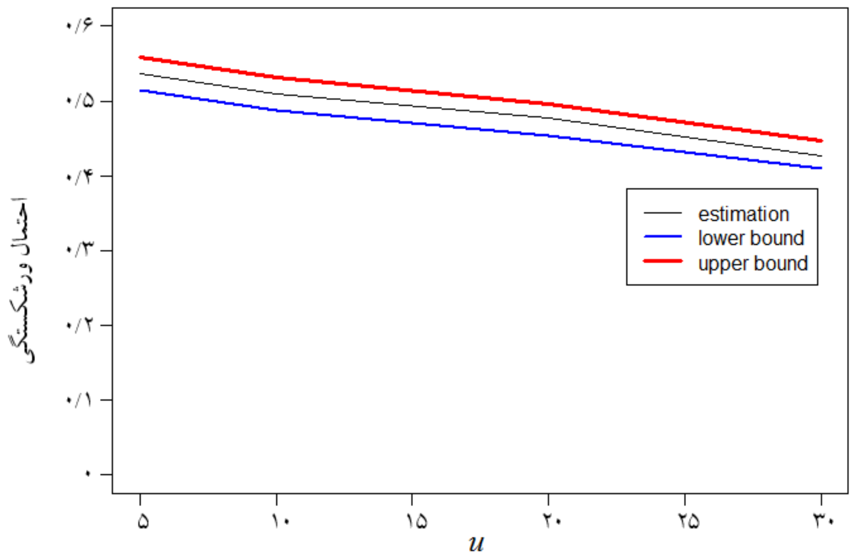
از جداول ۳، ۴ و ۵ ملاحظه می‌شود که برای هر کدام از توزیع‌های ذکر شده، با افزایش سرمایه اولیه مقدار احتمال ورشکستگی کاهش می‌یابد. در مورد اندازه‌های خسارت با توزیع‌های پارتو دیده می‌شود که احتمالات ورشکستگی دارای مقادیر بزرگی هستند و این به‌خاطر توزیع دم سنگین بودن توزیع پارتو است و البته برای تمام توزیع‌های دم سنگین چنین نتیجه‌ای اتفاق خواهد افتاد (برای جزییات بیشتر در مورد توزیع‌های دم سنگین به [۴] رجوع شود).



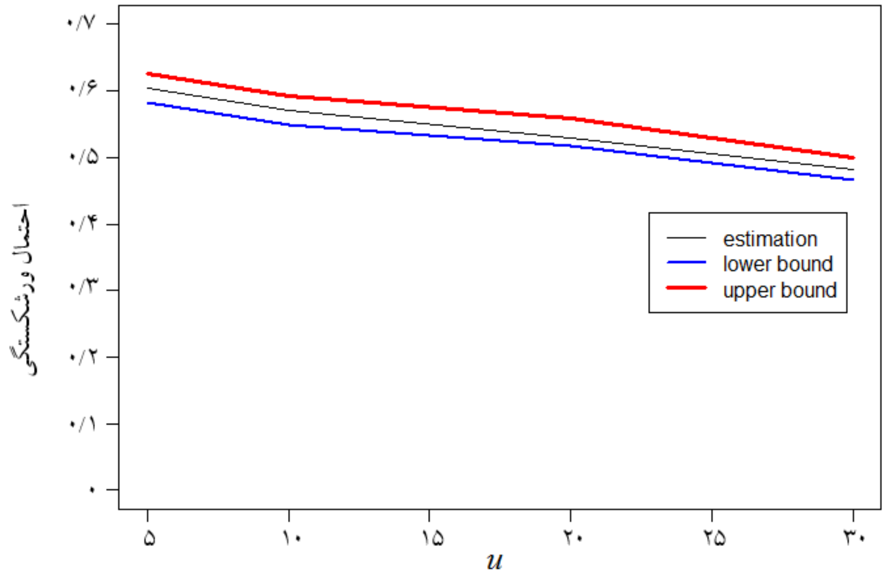
شکل ۴. احتمالات و کران‌های ورشکستگی زمان متناهی برای اندازه‌های خسارت نمایی با $t=۵۰$



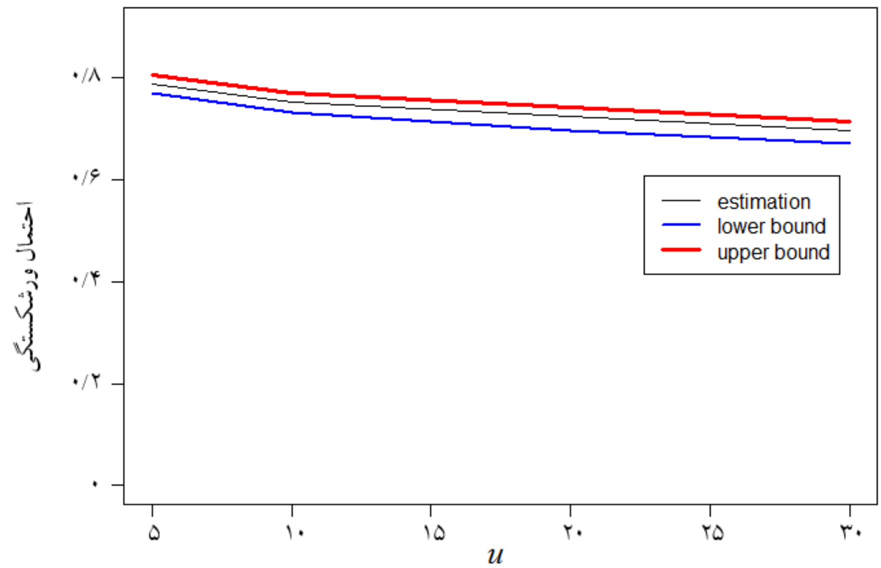
شکل ۵. احتمالات و کران‌های ورشکستگی زمان متناهی برای اندازه‌های خسارت نمایی با $t=150$



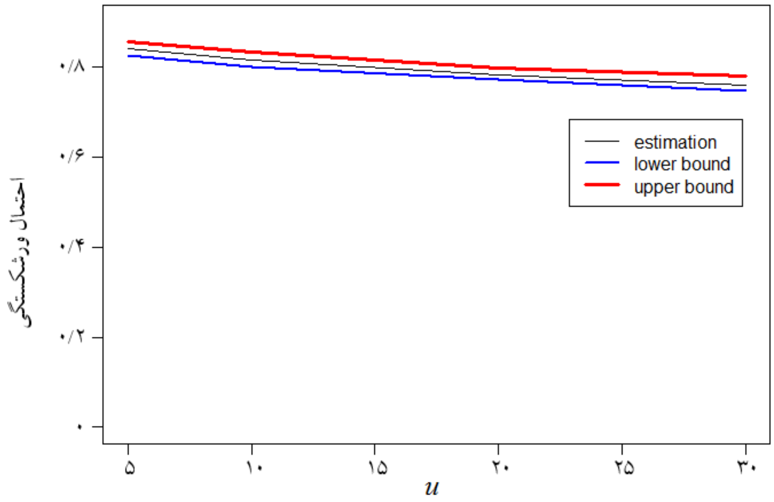
شکل ۶. احتمالات و کران‌های ورشکستگی زمان متناهی برای اندازه‌های خسارت نرمال با $t=50$



شکل ۷. احتمالات و کران‌های ورشکستگی زمان متناهی برای اندازه‌های خسارت نرمال با $t = ۱۵۰$



شکل ۸. احتمالات و کران‌های ورشکستگی زمان متناهی برای اندازه‌های خسارت پارتو با $t = ۵۰$



شکل ۹. احتمالات و کران‌های ورشکستگی زمان متناهی برای اندازه‌های خسارت پارتو با $t = ۱۵۰$

۲-۴. برآورد احتمالات ورشکستگی با ماتریس انتقال و ماتریس مولد فرایند مارکوف

تحت شرایط گفته شده، برای $\varepsilon = ۰/۰۱$ مقادیر عددی احتمالات ورشکستگی برای متغیرهای تصادفی نمایی، نرمال و پارتو به‌عنوان اندازه‌های خسارت با هر دو ماتریس انتقال و ماتریس مولد فرایند مارکوف برآورد شده‌اند. نتایج در جداول ۷، ۸ و ۹ آورده شده‌اند. با توجه به نتایج به‌دست آمده در این جداول ملاحظه می‌شود که برای هر مقدار از سرمایه اولیه و در هر زمان ثابت، مقدار احتمال ورشکستگی با استفاده از ماتریس انتقال تقریباً با مقدار آن با روش ماتریس مولد برابر است.

جدول ۷. احتمالات ورشکستگی مدل مخاطره جمعی برای اندازه‌های خسارت نمایی

u	۵	۵	۵	۵	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰
t	۵۰	۱۰۰	۱۵۰	۲۰۰	۵۰	۱۰۰	۱۵۰	۲۰۰
احتمال ورشکستگی با ماتریس انتقال	۰/۳۸۴	۰/۴۰۱	۰/۴۵۶	۰/۵۱۲	۰/۳۳۹	۰/۳۷۴	۰/۴۳۷	۰/۴۶۸
احتمال ورشکستگی با ماتریس مولد	۰/۳۷۵	۰/۳۹۳	۰/۴۵۱	۰/۴۹۷	۰/۳۱۶	۰/۳۶۲	۰/۴۱۰	۰/۴۵۳

ادامه جدول

u	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۳۰	۳۰	۳۰	۳۰
t	۵۰	۱۰۰	۱۵۰	۲۰۰	۵۰	۱۰۰	۱۵۰	۲۰۰
احتمال ورشکستگی با ماتریس انتقال	۰/۲۹۲	۰/۳۳۱	۰/۳۹۵	۰/۴۲۲	۰/۲۶۰	۰/۲۸۶	۰/۳۶۳	۰/۳۹۴
احتمال ورشکستگی با ماتریس مولد	۰/۲۸۰	۰/۳۲۴	۰/۳۷۸	۰/۳۹۱	۰/۲۵۱	۰/۲۶۳	۰/۳۵۰	۰/۳۸۱

جدول ۸. احتمالات ورشکستگی مدل مخاطره جمعی برای اندازه‌های خسارت نرمال

u	۵	۵	۵	۵	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰
t	۵۰	۱۰۰	۱۵۰	۲۰۰	۵۰	۱۰۰	۱۵۰	۲۰۰
احتمال ورشکستگی با ماتریس انتقال	۰/۵۱۷	۰/۵۵۲	۰/۵۹۶	۰/۶۲۷	۰/۴۹۱	۰/۵۲۳	۰/۵۶۷	۰/۵۹۸
احتمال ورشکستگی با ماتریس مولد	۰/۵۱۱	۰/۵۴۸	۰/۵۸۴	۰/۶۱۶	۰/۴۸۲	۰/۵۱۸	۰/۵۵۷	۰/۵۸۴

ادامه جدول

u	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۳۰	۳۰	۳۰	۳۰
t	۵۰	۱۰۰	۱۵۰	۲۰۰	۵۰	۱۰۰	۱۵۰	۲۰۰
احتمال ورشکستگی با ماتریس انتقال	۰/۴۸۴	۰/۴۸۵	۰/۵۲۳	۰/۵۶۲	۰/۴۶۶	۰/۴۹۸	۰/۵۱۴	۰/۵۵۱
احتمال ورشکستگی با ماتریس مولد	۰/۴۷۷	۰/۴۸۳	۰/۵۱۳	۰/۵۵۰	۰/۴۵۳	۰/۴۸۰	۰/۴۹۵	۰/۵۴۲

جدول ۹. احتمالات ورشکستگی مدل مخاطره جمعی برای اندازه‌های خسارت پارتو

u	۵	۵	۵	۵	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰
t	۵۰	۱۰۰	۱۵۰	۲۰۰	۵۰	۱۰۰	۱۵۰	۲۰۰
احتمال ورشکستگی با ماتریس انتقال	۰/۸۱۴	۰/۸۲۵	۰/۸۲۸	۰/۸۳۶	۰/۷۹۰	۰/۸۱۷	۰/۸۲۱	۰/۸۲۹
احتمال ورشکستگی با ماتریس مولد	۰/۷۹۷	۰/۸۱۹	۰/۸۲۱	۰/۸۲۸	۰/۷۸۱	۰/۸۱۰	۰/۸۱۵	۰/۸۲۱

ادامه جدول

u	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۳۰	۳۰	۳۰	۳۰
t	۵۰	۱۰۰	۱۵۰	۲۰۰	۵۰	۱۰۰	۱۵۰	۲۰۰
احتمال ورشکستگی با ماتریس انتقال	۰/۷۸۱	۰/۷۹۴	۰/۸۰۵	۰/۸۱۶	۰/۷۷۲	۰/۷۸۳	۰/۷۹۵	۰/۸۰۹
احتمال ورشکستگی با ماتریس مولد	۰/۷۷۵	۰/۷۸۴	۰/۷۹۶	۰/۸۰۳	۰/۷۶۵	۰/۷۷۴	۰/۷۸۶	۰/۷۹۵

۴. بحث و نتیجه‌گیری

در تمام مدل‌های شرکت‌های بیمه اطلاع از ساختار ریاضی و آماری آن در محاسبه احتمالات ورشکستگی دارای اهمیت است. در این مقاله، برای مدل مخاطره جمعی شرکت بیمه با حق بیمه ثابت و دارای فرایند پواسن مرکب در یک دوره زمانی فارغ از اینکه اندازه‌های خسارت دارای چه توزیع آماری باشند، یک فرمول برای احتمال ورشکستگی زمان متناهی با استفاده از احتمال انتقال پیشنهاد و سپس فرم ماتریسی فرمول پیشنهادی توسط ماتریس انتقال و ماتریس مولد فرایند مارکوف زمان-پیوسته بازنویسی شد. در ادامه، با فرض آنکه اندازه‌های خسارت دارای توزیع‌های نمایی، نرمال و پارتو باشند، مسیرهای زیادی از فرایند مخاطره جمعی شبیه‌سازی گردید و علاوه بر محاسبه احتمالات ورشکستگی زمان متناهی، فواصل اطمینان نااریب با ضریب اطمینان ۹۵ درصدی برآورد و نیز احتمالات ورشکستگی برای ماتریس‌های انتقال و مولد فرایند مارکوف محاسبه شدند. در فرایند مخاطره جمعی برای تمام توزیع‌های ذکر شده ملاحظه شد که با افزایش سرمایه اولیه، مقدار احتمال ورشکستگی کاهش می‌یابد. همچنین برای توزیع دم سنگین پارتو مقدار احتمال ورشکستگی نسبت به دو توزیع دیگر زیادتر می‌باشد.

References

۱. بازیاری، ا. و پرهام، غ. ع.، پیدایش فرایندهای مخاطره و بررسی مدل‌های مربوط به آن برای محاسبه احتمالات ورشکستگی، نهمین کنفرانس آمار ایران، مجموعه مقالات منتخب، (۱۳۸۷)، ۴۶-۶۱، دانشگاه اصفهان.

۲. بازیاری، ا.، احتمال ورشکستگی فرآیند مخاطره انفرادی شرکت بیمه با خسارتهای وابسته، مجله علوم آماری، (۱۳۹۱)، **(۱)۶**، ۳۷-۲۱.

۳. بازیاری، ا.، تحلیل احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی در مدل مخاطره جمعی، مجله علوم آماری، (۱۳۹۶)، **(۱)۱۱**، ۳۶-۱۷.

۴. رنگینیان، ز.، به‌فروز، م. و بازیاری، ا. نقدی بر استفاده از خسارت‌های دارای توزیع پارتو در مدل‌های مخاطره شرکت بیمه، مجله علوم آماری، (۱۳۹۷)، **(۲)۱۲**، ۴۴۷-۴۲۹.

۵. بازیاری، ا. و علیزاده، م. احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی در مدل مخاطره بیمه اتکایی مازاد خسارت، مجله علوم آماری، (۱۴۰۱)، **(۱)۱۶**، ۶۲-۴۱.

6. A. V. Asimit and A. L. Badescu, Extremes on the discounted aggregate claims in a time dependent risk model, Scandinavian Actuarial Journal, **2** (2010), 93-104.

7. A. L. Badescu, E. C. K. Cheung and D. Landriault, Dependent risk models with bivariate phase-type distributions, Journal of Applied Probability, **46** (2009), 113-131.

8. A. Bazyari and R. Roozegar, Finite time ruin probability and structural density properties in the presence of dependence in insurance risk model, Communications in Statistics, Theory and Methods, **48**(5) (2019), 1284-1304.

9. E. Bernackaitė and J. Šiaulys, The finite-time ruin probability for an inhomogeneous renewal risk model, American institute of mathematical sciences, **13**(1) (2017), 207-222.

10. M. Boudreault, H. Cossette, D. Landriault and E. Marceau, On a risk model with dependence between interclaim arrivals and claim sizes, Scandinavian Actuarial Journal, **5** (2006), 265-285.

11. K. Burnecki, P. Miśta and A. Weron, Ruin Probabilities in Finite and Infinite Time, Statistical Tools for Finance and Insurance, Springer, 2005.

12. J. Cai and D. C. M. Dickson, Ruin probabilities with a Markov chain interest model, Insurance: Mathematics and Economics, **35** (2004), 513-525.

13. Y. Chen, K. C. Yuen and K. W. Ng, Precise large deviations of random sums in presence of negative dependence and consistent variation, Methodology and Computing in Applied Probability, **13** (2011), 821-833.

14. S. K. Choi, M. H. Choi, H. S. Lee and E. Y. Lee, New approximations of ruin probability in a risk process, Quality Technology and Quantitative Management, **7**(4) (2010), 377-383.

15. H. Cramer, On the Mathematical Theory of Risk, Skandia Jubilee Volume, Stockholm, 1930.

16. F. E. De Vylder, Advance Risk Theory, Edition de I'University de ruxelles, 1996.

17. X. T. Dong, T. N. Huy and M. Kirane, Regularization and error estimate of infinite time ruin probabilities for Cramer–Lundberg model, Mathematical methods in applied sciences, **41**(10) (2018), 3820-3831.

18. S. Eryilmaz and O. L. Gebizlioglu, Computing finite time non-ruin probability and some joint distributions in discrete time risk model with exchangeable claim occurrences, Journal of Computational and Applied Mathematics, **313** (2017), 235-242.

19. Z. G. Ignatov, V. K. Kaishev and R. S. Krachunov, An improved finite-time ruin probability formula and its Mathematica implementation, Insurance: Mathematics and Economics, **29**(3) (2001), 375-386.

20. Z. G. Ignatov and V. K. Kaishev, A finite-time ruin probability formula for continuous claim severities, Journal of Applied Probability, **41**(2) (2004), 570-578.

21. J. Kasozi, and J. Paulsen, Numerical ultimate ruin probabilities under interest force, Journal of Mathematics and Statistics, **1**(3), (2005), 246-251.

22. W. Y. Lee, X. Li, F. Liu, Y. Shi and S. C. P. Yam, A Fourier-cosine method for finite-time ruin probabilities, Insurance: Mathematics and Economics, (2021), Forthcoming.

23. R. Leipus and J. Šiaulys, Asymptotic behaviour of the finite-time ruin probability in renewal risk models, Applied Stochastic Models in Bussines and Industry, **25** (2009), 309-321.

24. T. Lehtonen and H. Nyrhinen, On asymptotically efficient simulation of ruin probabilities in a Markovian environment, Scandinavian Actuarial Journal, **1992**(1) (1992), 60-75.

25. S. Li, Y. Lu and J. Garrido, A review of discrete-time risk models, Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales-Serie A. Matemáticas, **103**(2) (2009), 321-337.

26. F. I. Lundberg, Approximerad Framstallning av Sannohkhetsfunktionen. II. Aterforsakering av Kollektivrisker, Almqvist and Wiksell, Uppsala, 1903.

27. Yi Lu and S. Li, On the probability of ruin in a Markov-modulated risk model, Insurance: Mathematics and Economics, **37** (2005), 522-532.

28. D. Santana, J. González and L. Rincón, Approximations of the ultimate ruin probability in a risk process using Erlang mixtures, Methodology and Computing in Applied Probability, **19**(3) (2017), 775-798.

29. Y. Wang, Z. Cui, K. Wang and X. Ma, Uniform asymptotics of the finite-time ruin probability for all times, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **390**(1) (2012), 208-223.

30. K. P. Wat, K. C. Yuen, W. K. Li and X. Wu, On the compound binomial risk model with delayed

claims and randomized dividends, Risks, MDPI, **6**(1) (2018), 1-13.

31. Y. Yang, X. Ma and J. G. Lin, Approximation for the finite-time ruin probability of a general risk model with constant interest rate and extended negatively dependent heavy-tailed claims, Mathematical Problems in Engineering, (2011), 1-14.
32. K. C. Yuen, J. Li, and R. Wu, On a discrete-time risk model with delayed claims and dividends, Financial Derivatives and Risk Models, **4**(1) (2013), 3-16.