Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://jemr.khu.ac.ir/

On The Solvability of a System of Integral Equations of Stochastic Type via Measure of Non-Compactness

Sh. Banaei[1]

1. Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Bonab Branch, Islamic Azad University, Bonab, Iran. E-mail: math.sh.banaei@gmail.com

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 12 July 2022
Received in revised form: 28 May 2023
Accepted:13 August 2023
Published online: 29 February 2024

Keywords:
Measure non-compactness,
Integral equations,
Fixed point theorem.

ABSTRACT

Introduction

The concept of the measure of non-compactness was introduced by Kuratowski which plays an essential role in the study of systems of integral and differential equations. On the other hand, integral equations are used in applied sciences, such as physics and engineering.

Up to now, many authors and researchers investigated the solvability of integral and differential equations. In this paper, we investigate the existence of solution of integral equations

$$u_i(x) = \left(h(x,u_1(\xi(x)),\cdots,u_n(\xi(x))), \int_0^{\beta(x)} g(x,y,u_1(\eta(y)),\cdots,u_n(\eta(y)))dy\right.$$
$$\left.\times\left(f(x,u_1(\nu(x)),\cdots,u_n(\nu(x))), \int_0^{\beta(x)} q(x,y,u_1(\gamma(y)),\cdots,u_n(\gamma(y)))dy\right)\right.$$
$$(1 \leq i \leq n). \quad (1)$$

The main goal is to study the existence of solution integral equations (1) by the technique of measure of non-compactness.

Material and Methods

We first state and prove some fixed point theorems that extend Darbo's fixed point theorem. Then by using these theorems and helping the technique measure of non-compactness, we present an existence result for a system of large class nonlinear functional integral equations of Stochastic type.

Results and discussion

As an application of the obtained results, we deal with the solvability of a system of integral equations of Stochastic type in a Banach space. Our results generalize and extend a lot of comparable results in the literature. Finally, a concrete example is also included, which demonstrates the applicability of the obtained results.

Conclusion

The following conclusion was drawn from this research.

The system of integral equations of Stochastic type (1) has at least one solution in $BC(\mathbb{R}_+)^n$ space.

How to cite: Banaei, Shahram. (2023). On The Solvability of a System of Integral Equations of Stochastic Type via Measure of Non-Compactness. *Mathematical Researches*, 9 (4), 206 – 224.

 Publisher: Kharazmi University

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

بررسی حل‌پذیری یک دستگاه معادلات انتگرالی نوع تصادفی با استفاده از تکنیک اندازه نافشردگی

شهرام بنائی [1]

۱. گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه آزاد اسلامی واحد بناب، بناب، ایران. رایانامه: math.sh.banaei@gmail.com

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۴/۲۱
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۲/۳۰
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۵/۲۲
تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۱۲/۱۰

واژه‌های کلیدی:
اندازه نافشردگی،
معادلات انتگرالی،
قضیه نقطه ثابت داربو.

چکیده

در این مقاله با استفاده از مفهوم اندازه نافشردگی، یک انقباض جدید توسعه یافته از عملگرها در فضای باناخ را معرفی می کنیم و تعمیم‌هایی از قضیه نقطه ثابت داربو را بدست می‌آوریم. در ادامه، به عنوان یک کاربرد از نتایج بدست آمده، به حل پذیری یک دستگاه معادلات انتگرالی نوع تصادفی می‌پردازیم. یافته‌هایمان بسیاری از نتایج قابل مقایسه را در پیشینه تحقیق بسط و توسعه می‌دهد. درآخر یک مثال عینی نیز ارایه می دهیم تا کاربرد نتایج بدست آمده را نشان دهد.

استناد: بنائی ، شهرام (۱۴۰۲). بررسی حل‌پذیری یک دستگاه معادلات انتگرالی نوع تصادفی با استفاده ازتکنیک اندازه نافشردگی. *پژوهش‌های ریاضی*، ۹ (۴)، ۲۰۶ – ۲۲۴.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

مقدمه

مطالعه معادلات انتگرالی یکی از موضوعات مورد علاقه پژوهشگران در آنالیز تابعی غیرخطی است. معادلات انتگرالی کاربردهای وسیعی در علوم مختلف، از جمله در ریاضیات کاربردی و همچنین در مسائل متعددی در فیزیک دارند. تا به حال نویسندگان زیادی در این زمینه مقا له های مختلفی نوشته اند، به عنوان مثال مراجع [۴] ، [۷] ، [۹] و [۱۳ - ۱۱] را ببینید. لذا، در این مقاله حل پذیری یک دستگاه معادلات انتگرالی نوع تصادفی را مطالعه می کنیم.

از طرف دیگر مفهوم اندازه نافشردگی یک ابزار بسیار مفید و قدرتمند در آنالیز تابعی غیرخطی، نظریه نقطه ثابت متری و نظریه عملگرها در فضاهای باناخ است. از این نظریه برای مطالعه معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی، نظریه کنترل بهینه، معادلات تابعی، معادلات دیفرانسیل جزئی کسری، معادلات انتگرالی و همچنین برای مطالعه ویژگی های عملگرهای فشرده بین فضاهای با نا خ استفاده شده است. در سال ۱۹۳۰ کوراتفسکی[۱] [۱۰] برای اولین بار مفهوم اندازه نافشردگی را معرفی کرد. بعدها، در سال ۱۹۵۵ داربو[۲] [۸] یک قضیه نقطه ثابت را با استفاده از اندازه نافشردگی کوراتفسکی ثابت کرد که هم قضیه کلاسیک نقطه ثابت شاودر و هم اصل انقباض باناخ را تعمیم داد. در سال ۱۹۸۰ باناس[۳] تعریف دیگری از اندازه نافشردگی را بر اساس اصول موضوعه معرفی کرد که در کاربردها بسیار مفید بود.

در این مقاله، با استفاده از روش های مربوط به تکنیک اندازه نافشردگی به تعمیم و توسعه قضیه نقطه ثابت داربو [۸] می پردازیم و به عنوان یک کاربرد از این قضایا به مطالعه مسئله وجود جواب برای یک رده از معادلات انتگرالی نوع تصادفی که در یک شرط انقباض خاص صدق می کند، می پردازیم.

در ادامه بعضی از تعاریف، نمادها و نتایج مقدماتی که در سراسر این مقاله مورد استفاده قرار خواهند گرفت را یاد آوری می کنیم. خاطر نشان می کنیم که $\mathbb{R}$ نشان دهنده مجموعه اعداد حقیقی و $\mathbb{R}_+ = [0,+\infty)$ نشان دهنده مجموعه اعداد حقیقی نامنفی می باشد. فرض می‌کنیم $\left(E, \|.\|\right)$ یک فضای باناخ حقیقی با عنصر صفر باشد و بعلاوه $\bar{B}(a,r)$ گوی بسته به مرکز a و شعاع r در این فضا باشد. لازم به ذکر است که $\bar{B}_r$ نشان دهنده گوی $\bar{B}(0,r)$ می باشد. هرگاه X زیر مجموعه ای ناتهی از E باشد بستار X و کوچک ترین مجموعه ی محدب شامل X را به ترتیب با $\overline{X}$ و $ConvX$ نمایش می دهیم. همچنین قرارداد می کنیم که $\mathcal{M}_E$ خانواده ی تمام زیر مجموعه های ناتهی و کراندار E و $\mathcal{N}_E$ زیرخانواده ای از $\mathcal{M}_E$ باشد که شامل تمام زیر مجموعه های بطور نسبی فشرده است.

تعریف ۱.۱ ([۶]) : یک نگاشت $\mu: \mathcal{M}_E \to [0,\infty)$ را یک اندازه نافشردگی در فضای باناخ E گوییم اگر در شرایط زیر صدق کند:

۱) مجموعه $Ker\mu = \{X \in \mathcal{M}_E : \mu(X) = 0\}$ ناتهی باشد و $\mathrm{Ker}\mu \subseteq \mathcal{N}_E$،

۲) اگر $X \subseteq Y$ آنگاه $\mu(X) \le \mu(Y)$ ،

[1] Kuratowski
[2] Darbo
[3] Banas

۳) $\mu(\overline{X}) = \mu(X)$ ،

۴) $\mu(ConvX) = \mu(X)$،

۵) برای هر $\lambda \in (0,1)$ داشته باشیم $\mu(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\mu(X) + (1-\lambda)\mu(Y)$ ،

۶) اگر $\{X_n\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های بسته $\mathcal{M}_E$ باشد به قسمی که به ازای هر $n \geq 1$ ،$X_{n+1} \subseteq X_n$ و $\mu(X_n) \to 0$ ، آنگاه مجموعه ی $X_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ ناتهی است و $X_\infty \in Ker\mu$.

مجموعه $Ker\mu$ که در (۱) شرح داده شد را هسته اندازه نافشردگی μ می‌نامند. مشاهده می‌شود که مجموعه اشتراک X_∞ در (۶) یک عضو گردایه $Ker\mu$ است. در واقع، چون برای هر n، $\mu(X_\infty) \leq \mu(X_n)$ لذا $\mu(X_\infty) = 0$ یعنی $X_\infty \in Ker\mu$.

اکنون تعریف زوج نقطه ثابت برای یک تابع دومتغیره برداری و یک قضیه مفید راجع به ساختن یک اندازه نافشردگی روی فضای حاصل ضرب متناهی را ارائه می دهیم که در اثبات نتایج اصلی به آنها نیاز داریم.

تعریف ۱.۲ ([۱]) : یک عنصر $(x, y) \in X \times X$ را یک زوج نقطه ثابت نگاشت $T: X \times X \to X$ گوییم اگر $T(x, y) = x$ و $T(y, x) = y$.

قضیه ۱.۳ : فرض کنید $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ به ترتیب اندازه های نافشردگی در فضاهای باناخ $E_1, E_2, \ldots, E_n$ باشند. بعلاوه فرض کنید تابع $F: [0, \infty)^n \to 0, \infty)$ محدب باشد و $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ اگر و فقط اگر $x_i = 0$، برای $i = 1,2, \ldots, n$. آنگاه $\tilde{\mu}(X) = F(\mu_1(X_1), \mu_2(X_2), \ldots, \mu_n(X_n))$ یک اندازه نافشردگی در $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ تعریف می کند که در آن X_i نشان دهنده تصویر طبیعی از X بتوی E_i برای $i = 1,2, \ldots, n$ است [۲] .

اکنون بعنوان نتیجه ای از قضیه **۱.۳** مثال های زیر را ارائه می دهیم.

مثال ۱.۴ : فرض کنید μ یک اندازه نافشردگی روی فضای باناخ E ، تابع $F: [0, \infty)^2 \to [0, \infty)$ محدب باشد و $F(x_1, x_2) = 0$ اگر و فقط اگر $x_i = 0$ برای $i = 1,2$. آنگاه $\tilde{\mu}(X) = F(\mu(X_1), \mu(X_2))$ یک اندازه نافشردگی در $E \times E$ تعریف می کند که در آن X_i نشان دهنده تصویر طبیعی از X بتوی E_i برای $i = 1,2$ است.

مثال ۱.۵ فرض کنید μ یک اندازه نافشردگی روی فضای باناخ E باشد. تابع $F: [0, \infty)^2 \to [0, \infty)$ با ضابطه $F(x, y) = x + y$ محدب است و $F(x, y) = 0$ اگر و فقط اگر $x = y = 0$ ، از این رو تمام شرایط قضیه **۱.۳** برقرار است. بنابراین $\tilde{\mu}(X) = \mu(X_1) + \mu(X_2)$, یک اندازه نافشردگی در $E \times E$ تعریف می کند که در آن X_i نشان دهنده تصویر طبیعی از X بتوی E_i برای $i = 1,2$ است.

مثال ۱.۶ : فرض کنید μ یک اندازه نافشردگی روی فضای باناخ E باشد. اگر تابع $F: [0, \infty)^2 \to [0, \infty)$ را با ضابطه $F(x, y) = \max\{x, y\}$ برای هر $(x, y) \in [0, \infty)^2$ تعریف کنیم آنگاه تمام شرایط قضیه **۱.۳** برقرار است

و $\tilde{\mu}(X)=\max\{\mu(X_1),\mu(X_2)\}$ یک اندازه نافشردگی در $E\times E$ تعریف می‌کند که در آن X_i نشان دهنده تصویر طبیعی از X بتوی E_i برای $i=1,2$ است [۲] .

قضیه نقطه ثابت داربو یک تعمیم مهم از قضیه شاودر و شامل بخش وجودی قضیه نقطه ثابت باناخ است.

تعریف ۱.۷ ([۱]) : فرض کنید X و Y دو فضای خطی نرمدار باشند. نگاشت $T:X\to Y$ را فشرده گویند اگر $T(X)$ در Y فشرده نسبی باشد. $A\in Y$ را فشرده نسبی گویند هر گاه بستار A در Y فشرده باشد.

قضیه ۱.۸ (شاودر [۱]**)** فرض کنید Ω یک زیر مجموعه بسته و محدب از فضای باناخ E باشد. آنگاه هر نگاشت فشرده و محدب $T:\Omega\to\Omega$ حداقل یک نقطه ثابت دارد.

قضیه ۱.۹ (داربو [۸]**)** : فرض کنید Ω یک زیر مجموعه ناتهی، بسته، کراندار، و محدب از فضای باناخ E باشد و $T:\Omega\to\Omega$ یک نگاشت پیوسته باشد. فرض کنید که یک عدد ثابت $k\in[0,1)$ موجود باشد به قسمی که برای هر $X\subset\Omega$

$$\mu\big(T(X)\big)\leq k\mu(X).$$

آنگاه T یک نقطه ثابت دارد.

تعریف ۱.۱۰: فرض کنید Σ نشان دهنده مجموعه تمام توابع $V:(0,\infty)\to(1,\infty)$ باشد که در شرایط زیر صدق می‌کنند:

۱. V تابع صعودی و پیوسته است.

۲. برای تمام دنباله های $\{\alpha_n\}\subseteq(1,\infty)$، $\lim_{n\to\infty}V(\alpha_n)=1$ است اگر و تنها اگر $\lim_{n\to\infty}(\alpha_n)=0$.

همچنین فرض کنید Φ نشان دهنده مجموعه تمام توابع $\varphi:(1,\infty)\to(1,\infty)$ باشد که در شرایط زیر صدق می‌کنند:

۱. φ تابع صعودی و پیوسته است.

۲. برای هر $t\in(1,\infty)$ داشته باشیم، $\lim_{n\to\infty}\varphi^n(t)=1$.

مفهوم $A(f,.)$ در [۳] توسط آلتن و ترک اغلو بیان شده است.

فرض کنید $F\ \big([0,\infty)\big)$ کلاس تمام توابع $f:\ [0,\infty)\to[0,\infty)$ باشد و $\mathcal{F}$ کلاس تمام توابع

$$A(\bullet;\ .):\ F\ \big([0,\infty)\big)\ \to F\ \big([0,\infty)\big) \text{ و } f\ \to A(f;\ .)$$

باشد که در شرایط زیر صدق می کنند:

۱. $A(f,0)=0$ و برای هر $x>0$ ، $A(f,x)>0$

۲. برای هر $x\leq y$ ، $A(f,x)\leq A(f,y)$

۳. $\lim_{n\to\infty}A(f,x_n)=A\left(f,\lim_{n\to\infty}x_n\right)$

۴. برای هر $f\in F\ \big([0,\infty)\big)$ داشته باشیم، $A(f,\max\{x,y\})=\max\{A(f,x),\ A(f,y)\}$

۲- نتایج اصلی و یافته‌ها

قضیه ۲.۱ : فرض کنید C یک زیرمجموعه ناتهی، بسته، کراندار و محدب از فضای باناخ E و μ یک اندازه نافشردگی دلخواه باشد. بعلاوه $T: C \to C$ یک نگاشت پیوسته باشد به طوری که برای هر زیر مجموعه ناتهی X از C در شرط انقباضی زیر صدق کند :

$$\mathrm{V}(\mathrm{A}(\mathrm{f}\,; \mu(TX))) \leq \varphi\big(V(\mathrm{A}(\mathrm{f}\,; \mu(X)))\big) \qquad (۲.۱)$$

که در آن $\mathrm{V} \in \Sigma$ ، $\varphi \in \Phi$ ، $\mathrm{A}(\bullet; .) \in \mathcal{F}$. آنگاه T حداقل یک نقطه ثابت در C دارد.

برهان: با استفاده از استقرا دنباله $\{\mathrm{C}_n\}_{n=1}^{\infty}$ را به قسمی می‌سازیم که $\mathrm{C}_0 = \mathrm{C}$ و برای هر $n = 1,2,\cdots$ ، $\mathrm{C}_{n+1} = \overline{\mathrm{Conv}}\, T(\mathrm{C}_n)$. در این صورت

$$T(\mathrm{C}_0) = T(\mathrm{C}) \subseteq \mathrm{C} = \mathrm{C}_0,$$
$$\mathrm{C}_1 = Conv T(\mathrm{C}_0) \subseteq \mathrm{C}_0\,,$$

بنابراین با ادامه این روند داریم :

$$\cdots \subseteq \mathrm{C}_{n+1} \subseteq \cdots \subseteq \mathrm{C}_1 \subseteq \mathrm{C}_0.$$

حال اگر یک عدد صحیح $N \geq 0$ موجود باشد به قسمی که $\mu(\mathrm{C}_N) = 0$ آنگاه ، C_N فشرده نسبی است. بنابراین قضیه ۱.۸ ایجاب می‌کند که T حداقل یک نقطه ثابت دارد.

از طرفی ،

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(\mathrm{A}(\mathrm{f}\,; \mu(\mathrm{C}_{n+1}))) &= \mathrm{V}(\mathrm{A}(\mathrm{f}\,; \mu(T\mathrm{C}_n))) \\ &\leq \varphi\big(V(\mathrm{A}(\mathrm{f}\,; \mu(\mathrm{C}_n)))\big) \\ &\ \vdots \\ &\leq \varphi^{n+1}\big(V(\mathrm{A}(\mathrm{f}\,; \mu(\mathrm{C}_0)))\big)\end{aligned}$$

چون $\mu(\mathrm{C}_{n+1})$ یک دنباله همگرا است، لذا می توان فرض کرد که

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\mathrm{C}_{n+1}) = \mathrm{r}$$

حال نشان می دهیم که $r = 0$ است.

با استفاده از خواص تابع φ و حد گرفتن از نامساوی بالا، داریم

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{V}(\mathrm{A}(\mathrm{f}\,; \mu(\mathrm{C}_{n+1}))) = 1$$

بنابراین،

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{A}(\mathrm{f}\,; \mu(\mathrm{C}_{n+1})) = 0$$

با استفاده از خواص $\mathrm{A}(\bullet; .)$ نتیجه می گیریم،

$$\mathrm{A}\Big(\mathrm{f}\,; \lim_{n\to\infty} \mu(\mathrm{C}_{n+1})\Big) = 0$$

حال با استفاده از اولین خاصیت $\mathrm{A}(\bullet; .)$ در تساوی بالا داریم :

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\mathrm{C}_n) = 0$$

که آن ایجاب می کند $\mu(C_n) \to 0$ وقتی که $n \to \infty$.

چون $C_{n+1} \subseteq C_n$، لذا بنابر اصل (۶) از تعریف **۱.۱** نتیجه می شود که مجموعه $C_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ ناتهی، بسته، محدب و پایا تحت عملگر T و متعلق به $Ker\mu$ است. اکنون بنابر قضیه **۱.۸** ، T دارای حداقل یک نقطه ثابت در C است.

قضیه۲ .۲ : فرض کنید (X, d) یک فضای متریک کامل باشد و $T: X^k \to X$ به طوری که k یک عدد صحیح مثبت است. همچنین

$$d(T(x_1, x_2, \dots, x_k), T(x_2, x_3, \dots, x_{k+1})) \le \sum_{i=1}^{k} \mu_i\, d(x_i, x_{i+1})$$

برای تمام $x_1, x_2, \dots, x_k$ در X که $\mu_i \ge 0$ و $\sum_{i=1}^{k} \mu_i \in [0,1]$. آنگاه T دارای یک نقطه ثابت $x^\star$ است. این نقطه ثابت را نقطه ثابت از نوع پرشیچ می‌نامیم. ($T(x^\star, x^\star, \dots, x^\star) = x^\star$)

قضیه ۳ .۲: فرض کنید C یک زیر مجموعه ناتهی، بسته، کراندار و محدب از فضای باناخ E و μ یک اندازه نافشردگی دلخواه باشد. بعلاوه $T: C^n \to C$ یک نگاشت پیوسته باشد که برای هر زیر مجموعه ناتهی X_i از C در شرط انقباضی زیر صدق کند :

$$V(A(f; \mu(T(X_1 \times \cdots \times X_n)))) \le \frac{1}{n} \varphi\left(V\left(A(f; \mu(X_1) + \cdots + \mu(X_n))\right)\right) \quad (۲.۲)$$

که در آن $V \in \Sigma$ ، $\varphi \in \Phi$ و $A(\bullet; .) \in \mathcal{F}$. آنگاه T حداقل یک نقطه ثابت از نوع پرشیچ در C دارد.

برهان: ابتدا عملگر $\widetilde{T}: C^n \to C^n$ را با ضابطه

$$\widetilde{T}(x_1, x_2, \dots, x_n) = T((x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, (x_1, x_2, \dots, x_n))$$

تعریف می کنیم. واضح است که $\widetilde{T}$ پیوسته است. حال نشان می دهیم که $\widetilde{T}$ در تمام شرایط قضیه **۲.۱** صدق می کند. فرض کنید $X \subset C^n$ یک زیرمجموعه ناتهی باشد. می دانیم که مثالهای **۱.۵** و **۱.۶** ایجاب می کنند که $\tilde{\mu}(X) = \mu(X_1) + \mu(X_2) + \cdots \mu(X_n)$ و $\tilde{\mu}(X) = \max\{\mu(X_1), \mu(X_2), \dots \mu(X_n)\}$ اندازه نافشردگی می باشند، که در آن X_i برای $i = 1,2, \dots, n$ نشان دهنده تصاویر طبیعی از X بتوی E است. در این صورت بنابر (۲) از تعریف **۱.۱** و (۲.۲) داریم :

$$\begin{aligned} V\left(A\left(f; \tilde{\mu}(\widetilde{T}X)\right)\right) &= V\left(A(f; \tilde{\mu}(T(X_1 \times \cdots \times X_n) \times \cdots \times (T(X_1 \times \cdots \times X_n)))\right) \\ &= V(A(f; \mu(T(X_1 \times \cdots \times X_n)))) \\ &\le n\, V(A(f; \mu(T(X_1 \times \cdots \times X_n)))) \\ &\le \varphi\left(V\left(A\left(f; \left(\mu(X_1) + \cdots + \mu(X_n)\right)\right)\right)\right) \\ &\le \varphi(V(A(f; \tilde{\mu}(X)))) \end{aligned} \quad (۲.۳)$$

از این رو بنابر قضیه **۲.۱** ، $\widetilde{T}$ دارای حداقل یک نقطه ثابت است و این موضوع ایجاب می کند که عناصر $x_1, x_2, \dots, x_n$

وجود داشته باشند به طوری که $T(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 = x_2, \cdots, = x_n$ و این یعنی T دارای یک نقطه ثابت از نوع پرشیچ است.

قضیه ۲۰۴: فرض کنید C یک زیر مجموعه ناتهی، بسته، کراندار و محدب از فضای باناخ E و μ یک اندازه نافشردگی دلخواه باشد. بعلاوه $T: C^n \to C$ یک نگاشت پیوسته باشد که برای زیر مجموعه های ناتهی X_i از C در شرط انقباضی زیر صدق کند :

$$\mathrm{V}(\mathrm{A}(\mathrm{f};\ \mu(T(X_1\times \cdots \times X_n)))) \le \varphi\left(V\left(\mathrm{A}(\mathrm{f};\ \max\{\mu(X_1), \cdots, \mu(X_n)\})\right)\right) \qquad (۲.۴)$$

که در آن $\mathrm{V} \in \Sigma$ ، $\varphi \in \Phi$ و $\mathrm{A}(\bullet;\ .) \in \mathcal{F}$. آنگاه T حداقل یک نقطه ثابت از نوع پرشیچ در C دارد.

برهان: ابتدا عملگر $\tilde{T}: C^n \to C^n$ را با ضابطه

$$\tilde{T}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathrm{T}((x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, (x_1, x_2, \dots, x_n))$$

تعریف می کنیم. واضح است که $\tilde{T}$ پیوسته است. حال ادعا می کنیم که $\tilde{T}$ در تمام شرایط قضیه **۲.۱** صدق می کند. فرض کنید $X \subset C^n$ یک زیرمجموعه ناتهی باشد. می دانیم که مثال ۱. ۵ ایجاب می کند که $\tilde{\mu}(X) = \max\{\mu(X_1),\ \mu(X_2), \dots, \mu(X_\mathrm{n})\}$ یک اندازه نافشردگی است، که در آن X_i برای $i = 1,2, \dots, \mathrm{n}$ نشان دهنده تصاویر طبیعی از X بتوی E است. در این صورت بنابر (۲) از تعریف **۱.۱** و (۲.۴) داریم :

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}\left(\mathrm{A}\left(\mathrm{f};\ \tilde{\mu}(\tilde{T}X)\right)\right) &= V\left(\mathrm{A}(\mathrm{f};\tilde{\mu}(T(X_1\times \cdots \times X_n)\times \cdots \times (T(X_1\times \cdots \times X_n)\,)\right) \\
&= \mathrm{V}(\mathrm{A}(\,\mathrm{f};\ \max\ \{\mu(\,T(X_1\times \cdots \times X_n)),\ \cdots, \mu(\,T(X_1\times \cdots \times X_n))\}\,))\,) \\
&= \mathrm{V}(\mathrm{A}(\mathrm{f};\mu(\,T(X_1\times \cdots \times X_n))\,)) \\
&\le \varphi(\,\mathrm{V}(\mathrm{A}(\mathrm{f};\max\ \{\,(\mu(X_1), \cdots, \mu(X_n)\}))\,) \\
&\le \varphi\left(\mathrm{V}(\mathrm{A}(\mathrm{f};\tilde{\mu}(X\,)))\right)
\end{aligned}$$

(۲.۵)

از این رو بنابر قضیه **۲.۱** ، $\tilde{T}$ دارای حداقل یک نقطه ثابت است و این موضوع ایجاب می کند که عناصر $x_1, x_2, \dots, x_n$ وجود داشته باشند به طوری که $T(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 = x_2, \cdots, = x_n$ و این یعنی T دارای یک نقطه ثابت از نوع پرشیچ است.

با انتخاب $\mathrm{A}(\mathrm{f};\ \mathrm{t}) = t$ و $\mathrm{f} = \mathrm{I}$ (I تابع همانی) در قضیه **۲۰۴** نتیجه زیر را داریم.

نتیجه ۲۰۵: فرض کنید C یک زیر مجموعه ناتهی، بسته، کراندار و محدب از فضای باناخ E و μ یک اندازه نافشردگی دلخواه باشد. بعلاوه $T: C^n \to C$ یک نگاشت پیوسته باشد که برای زیر مجموعه های ناتهی X_i از C در شرط ا نقباضی زیر صدق کند :

$$\mathrm{V}(\,\mu(T(X_1\times \cdots \times X_n)) \le \varphi(V(max\ \{\,\mu(X_1), \cdots, \mu(X_n)\,\})) \qquad (۲.۶)$$

که در آن $\mathrm{V} \in \Sigma$ و $\varphi \in \Phi$. آنگاه T حداقل یک نقطه ثابت از نوع پرشیچ در C دارد.

۳- کاربرد

در این بخش فضای باناخ $BC(\mathbb{R}_+)$ شامل همه توابع حقیقی کراندار و پیوسته روی $\mathbb{R}_+$ با نرم سوپریمم $\|x\| = \sup\{|x(t)|: t \geq 0\}$ را در نظر می گیریم. فرض کنید تابع $h: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ تعریف شده باشد به طوری که برای هر $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}^3$ ، $h(t_1, t_2, t_3) \geq 0$ باشد. در ادامه از یک اندازه نافشردگی روی $BC(\mathbb{R}_+)$ که در مراجع [۶ - ۵] آمده است استفاده خواهیم کرد. به منظور تعریف این اندازه نافشردگی یک مجموعه ناتهی و کراندار و از این پس ثابت X از $BC(\mathbb{R}_+)$ و عدد حقیقی $L > 0$ را در نظر می گیریم. برای عضو دلخواه $x \in X$ و $\varepsilon \geq 0$ پیمانه پیوستگی یا ضریب پیوستگی x روی بازه $[0, L]$ را با نماد $\omega^L(x, \varepsilon)$ نشان می هیم، به عبارتی

$$\omega^L(x, \varepsilon) = \sup\{|x(t) - x(s)|: t, s \in [0, L], |t - s| \leq \varepsilon\}$$

بعلاوه قرار می دهیم :

$$\omega^L(X, \varepsilon) = \sup\{\omega^L(x, \varepsilon): x \in X\},$$
$$\omega_0^L(X) = \lim_{\varepsilon \to 0} \omega^L(X, \varepsilon),$$
$$\omega_0(X) = \lim_{L \to \infty} \omega_0^L(X\ \ )$$

اگر t یک عدد ثابت در $\mathbb{R}_+$ باشد، آنگاه قرار می دهیم $X(t) = \{x(t): x \in X\}$. سرانجام تابع μ روی $\mathcal{M}_{BC(\mathbb{R}_+)}$ را بصورت زیر تعریف می کنیم :

$$\mu(X) = \omega_0(X) + \limsup_{t \to \infty} diam X(t) \qquad (۳ . ۱)$$

که در آن

$$diam X(t) = \sup\{|x(t) - y(t)|: x, y \in X\}$$

در منابع [۶ - ۵] نشان داده شده است که تابع $\mu(X)$ یک اندازه نافشردگی است بطوریکه در تمام اصول موضوعه تعریف **۱.۱** صدق می کند. حال بعنوان یک کاربرد از نتیجه **۲.۵**، قصد داریم وجود جواب برای یک دستگاه n تایی از معادلات انتگرالی نوع تصادفی زیر را بررسی کنیم :

$$u_i(x) = \left(h(x, u_1(\xi(x)), \cdots, u_n(\xi(x))), \int_0^{\beta(x)} g(x, y, u_1(\eta(y)), \cdots, u_n(\eta(y)))dy\right.$$
$$\left. \times \left(f(x, u_1(\nu(x)), \cdots, u_n(\nu(x))), \int_0^{\beta(x)} q(x, y, u_1(\gamma(y)), \cdots, u_n(\gamma(y)))dy\right.\right.$$
$$(1 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{n})$$

(۳ . ۲)

برای این منظور شرایط زیر را در نظر می گیریم :

۱) توابع $h, f: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ کراندار و پیوسته هستند و برای هر $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$ و هر

$\varrho_1, \dots, \varrho_n, \sigma_1, \dots, \sigma_n \in BC(\mathbb{R}_+)$،

$$\begin{aligned}|h(x_1,\varrho_1, \dots, \varrho_n) - h(x_2, \sigma_1, \dots, \sigma_n)| \\ \le V^{-1}\left(\varphi(V|x_1-x_2| + \max\{|\varrho_1 - \sigma_1|, \dots, |\varrho_n - \sigma_n|\})\right) \\ |f(x_1,\varrho_1, \dots, \varrho_n) - f(x_2, \sigma_1, \dots, \sigma_n)| \\ \le V^{-1}\left(\varphi(V|x_1-x_2| + \max\{|\varrho_1 - \sigma_1|, \dots, |\varrho_n - \sigma_n|\})\right)\end{aligned}$$

و بعلاوه

$$N = \sup\{\max|h(x,0,\cdots,0)|, |f(x,0,\cdots,0)| : x \in \mathbb{R}_+\} < \infty$$

۲) توابع $\xi, \nu, \gamma, \eta, \beta: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ پیوسته اند و $\xi(t), \ \nu(t) \to \infty$ وقتی $t \to \infty$.

۳) تابع‌های $g, q: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ توابع پیوسته‌ای هستند به قسمی که توابع پیوسته $\pi, \varpi: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ وجود دارند طوری که

$$|g(x,y,u_1,\cdots,u_n)| \le \pi(x)\varpi(y) \qquad (۳.۳)$$

همچنین

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^{\beta(x)} \pi(x)\varpi(y)dy = 0$$

٤) نامساوی

$$V^{-1}\left(\varphi(V(\max\{r, Z\}))\right) + N \le r$$

دارای جواب مثبت r_0 می باشد که

$$Z = \sup\left\{\left|\int_0^{\beta(x)} \pi(x)\beta(y)dy\right|\right\}.$$

اکنون ادعای خود را بصورت زیر صورت بندی می کنیم:

قضیه ۳۰۱: اگر شرایط ۱-۴ بالا برقرار باشند، آنگاه دستگاه معادلات (۲ . ۳) حداقل یک جواب در فضای $BC(\mathbb{R}_+)^n$ دارد.

برهان ابتدا عملگرهای $F, G: BC(\mathbb{R}_+) \times \cdots \times BC(\mathbb{R}_+) \to BC(\mathbb{R}_+)$ و Ω را با ضابطه های

$$F(u_1,\dots,u_n)(x)$$
$$=\big(h(x,u_1(\xi(x)),\cdots,u_n(\xi(x))\big),\int_0^{\beta(x)} g(x,y,u_1(\eta(y)),\cdots,u_n(\eta(y))dy\,,$$

$$G(u_1,\dots,u_n)(x)$$
$$=\big(f(x,u_1(\nu(x)),\cdots,u_n(\nu(x))\big),\int_0^{\beta(x)} q(x,y,u_1(\gamma(y)),\cdots,u_n(\gamma(y))dy,$$

$$\Omega(t)=F(t)\times G(t). \qquad (۳ . ۴)$$

تعریف می‌کنیم. اکنون با به کار گیری مفروضات ۱-۴ داریم :

$$|F(u_1,\dots,u_n)(x)|$$
$$\le \Big|\big(h(x,u_1(\xi(x)),\cdots,u_n(\xi(x))\big),\int_0^{\beta(x)} g(x,y,u_1(\eta(y)),\cdots,u_n(\eta(y))dy - h(x,0,0)\Big| + |h(x,0,0)|$$
$$\le V^{-1}\left(\varphi(V\ \max\{\ |u_1(\xi(x)),\cdots,u_n(\xi(x))|,\left|\left(\int_0^{\beta(x)} g(x,y, u_1(\eta(y)),\cdots,u_n(\eta(y))dy\right)\right|\})\right)+\mathrm{N}$$

$$\le V^{-1}\left(\varphi\left(V\left(\max\{\ |u_1(\xi(x)),\cdots,u_n(\xi(x))|,|\mathrm{Z}|\}\right)\right)\right) + \mathrm{N}$$

$$\le V^{-1}\left(\varphi(V\ (\max\{\|\ u_1\ \|,\dots,\|\ u_n\ \|,|\mathrm{Z}|\})\right) + \mathrm{N}\,.$$

بنابراین ،

$$\|\ F(u_1,\dots,u_n)\ \|\le V^{-1}\left(\varphi(V\ (\max\{\|\ u_1\ \|,\dots,\|\ u_n\ \|,\mathrm{Z}\,\})\right)+\mathrm{N}. \qquad (۳ . ۵)$$

و به طریق مشابه

$$\|\ G(u_1,\dots,u_n)\ \|\le V^{-1}\left(\varphi(V\ (\max\{\|\ u_1\ \|,\dots,\|\ u_n\ \|,\mathrm{Z}\,\})\right)+\mathrm{N}. \qquad (۳ . ۶)$$

نامساوی های (۳ . ۵) ، (۳ . ۶) و شرط ۴ قضیه **۳۰۱** نشان می دهند که $\Omega(\overline{\mathrm{B}}_{\mathrm{r}0})^n\subseteq \overline{\mathrm{B}}_{\mathrm{r}0}$.

اکنون نشان می دهیم Ω روی $(\overline{\mathrm{B}}_{\mathrm{r}0})^n$ پیوسته است. برای این منظور فرض می کنیم $\varepsilon>0$ دلخواه باشد و

$(r_1,\dots,r_n)\in(\overline{\mathrm{B}}_{r0})^n$ را انتخاب می کنیم. بعلاوه $(m_1,\dots,m_n)\in(\overline{\mathrm{B}}_{r0})^n$ را به قسمی در نظر می گیریم که،

$$\|m_1-r_1\|,\dots,\|m_n-r_n\|<\varepsilon$$

در این صورت برآورد زیر را داریم:

$$|F(m_1,\dots,m_n)(x)-F(r_1,\dots,r_n)(x)|=$$

$$\left|\begin{array}{r} h\left(x,m_1\left(\xi(x)\right),\dots,m_n\left(\xi(x)\right)\right),\int_0^{\beta(x)} g\left(x,y,m_1\left(\eta(y)\right),\dots,m_n\left(\eta(y)\right)\right)dy \\ -h\left(x,r_1\left(\xi(x)\right),\dots,r_n\left(\xi(x)\right)\right),\int_0^{\beta(x)} g\left(x,y,r_1\left(\eta(y)\right),\dots,r_n\left(\eta(y)\right)\right)dy \end{array}\right|$$

$$\le V^{-1}\left(\varphi\left(V\left(\max\{\left|m_1\left(\xi(x)\right)-r_1\left(\xi(x)\right),\dots,m_n\left(\xi(x)\right)-r_n\left(\xi(x)\right)\right|\}\right)\right),\right.$$

$$\left|\left(\int_0^{\beta(t)} g\left(x,y,m_1\left(\eta(y)\right),\dots,m_n\left(\eta(y)\right)\right)dy\right)-\left(\int_0^{\beta(t)} g\left(x,y,r_1\left(\eta(y)\right),\dots,r_n\left(\eta(y)\right)\right)dy\right)\right|$$

$$\le V^{-1}\left(\varphi\left(V\left(\max\{\left|m_1\left(\xi(x)\right)-r_1\left(\xi(x)\right)\right|,\dots,\left|m_n\left(\xi(x)\right)-r_n\left(\xi(x)\right)\right|\}\right)\right),\right.$$

$$\left|\left(\int_0^{\beta(t)} g\left(x,y,m_1\left(\eta(y)\right),\dots,m_n\left(\eta(y)\right)\right)dy\right)-\left(\int_0^{\beta(t)} g\left(x,y,r_1\left(\eta(y)\right),\dots,r_n\left(\eta(y)\right)\right)dy\right)\right|.$$

فرض کنید:

$$\omega_{r0}^T(g,\varepsilon)=\sup\left\{\begin{array}{c}|g(x,y,m_1,\dots,m_n)-g(x,y,r_1,\dots,r_n)|:\mathrm{x}\in[0,T],y\in[0,\beta_T],\\ |m_1-r_1|+\dots+|m_n-r_n|\le\varepsilon,\ \ m_i,r_i\in[-r_0,r_0]\end{array}\right\}$$

$$\beta_T=\sup\{\beta(t):\mathrm{t}\in[0,T]\}.$$

بنابراین برای هر t ثابت و دلخواه در بازه $[0,T]$ داریم :

$$\begin{aligned}&|F(m_1,\dots,m_n)(x)-F(r_1,\dots,r_n)(x)|\\ &\quad\le\ V^{-1}\left(\varphi\left(V\left(\max\{\left|m_1\left(\xi(x)\right)-r_1\left(\xi(x)\right)\right|,\dots,\left|m_n\left(\xi(x)\right)\right.\right.\right.\right.\\ &\quad\left.\left.\left.\left.-r_n\left(\xi(x)\right)\right|\}\right),\ \beta_T\omega_{r0}^T(g,\varepsilon)\right)\right)\end{aligned} \tag{۳ . ۷}$$

با استفاده از پیوستگی g روی $[0,T]\times[0,\beta(\mathrm{T})]\times[-r_0,r]^n$ نتیجه می‌شود که $\omega(\varepsilon)\to0$ وقتی که $\varepsilon\to0$.

از این رو (۷ . ۳) و نامساوی های بالا ایجاب می کنند که F یک تابع پیوسته روی $(\overline{\mathrm{B}}_{r0})^n$ است. دقیقا مشابه با این

اثبات نتیجه می شود که G یک تابع پیوسته روی $(\overline{\mathrm{B}}_{\mathrm{r0}})^n$ است. لذا $\Omega = F \times G$ یک تابع پیوسته روی $(\overline{\mathrm{B}}_{\mathrm{r0}})^n$ است.

اکنون باید نشان دهیم Ω در تمام شرایط نتیجه **۲۰۵** صدق می‌کند. فرض کنیم $T, \varepsilon \in \mathbb{R}_+$ و $X_1, \dots, X_{\mathrm{n}}$ زیرمجموعه های ناتهی و کرانداری از $\bar{B}_r$ باشند. $x_1, x_2 \in [0, T]$ را به قسمی انتخاب می‌کنیم که $|x_1 - x_2| \le \varepsilon$. بدون کاستن از کلیت فرض می‌کنیم $\beta(x_1) < \beta(x_2)$. در این صورت برای $(u_1, \dots, u_{\mathrm{n}}) \in X_1 \times \dots \times X_{\mathrm{n}}$ داریم :

$$|F(u_1, \dots, u_{\mathrm{n}})(x_2) - F(u_1, \dots, u_{\mathrm{n}})(x_1)| \le$$

$$V^{-1}\Big(\varphi\Big(V\ \left|\begin{array}{r} h\left(x_2, u_1(\xi(x_2)), \dots, u_n(\xi(x_2))\right), \int_0^{\beta(x_2)} g\left(x_2, y, u_1(\eta(y)), \dots, u_n(\eta(y))\right) dy \\ -h\left(x_1, u_1(\xi(x_2)), \dots, u_n(\xi(x_2))\right), \int_0^{\beta(x_2)} g(x_2, y, u_1(\eta(y)), \dots, u_n(\eta(y))) dy \end{array}\right|$$

$$+ \left|\begin{array}{r} h\left(x_1, u_1(\xi(x_2)), \dots, u_n(\xi(x_2))\right), \int_0^{\beta(x_2)} g\left(x_2, y, u_1(\eta(y)), \dots, u_n(\eta(y))\right) dy \\ -h\left(x_1, u_1(\xi(x_1)), \dots, u_n(\xi(x_1))\right), \int_0^{\beta(x_2)} g(x_2, y, u_1(\eta(y)), \dots, u_n(\eta(y))) dy \end{array}\right|$$

$$+ \left|\begin{array}{r} h\left(x_1, u_1(\xi(x_1)), \dots, u_n(\xi(x_1))\right), \int_0^{\beta(x_2)} g\left(x_2, y, u_1(\eta(y)), \dots, u_n(\eta(y))\right) dy \\ -h\left(x_1, u_1(\xi(x_1)), \dots, u_n(\xi(x_1))\right), \int_0^{\beta(x_1)} g(x_2, y, u_1(\eta(y)), \dots, u_n(\eta(y))) dy \end{array}\right|$$

$$+ \left|\begin{array}{r} h\left(x_1, u_1(\xi(x_1)), \dots, u_n(\xi(x_1))\right), \int_0^{\beta(x_1)} g\left(x_2, y, u_1(\eta(y)), \dots, u_n(\eta(y))\right) dy \\ -h\left(x_1, u_1(\xi(x_1)), \dots, u_n(\xi(x_1))\right), \int_0^{\beta(x_1)} g(x_1, y, u_1(\eta(y)), \dots, u_n(\eta(y))) dy \end{array}\right|$$

$$\le V^{-1}\ \Big(\varphi\Big(V\ (\ |x_2 - x_1| + \left|u_1(\xi(x_2)) - u_1(\xi(x_1))\ , \dots, u_n(\xi(x_2)) - u_n(\xi(x_1))\right|\ )$$

$$+ \left|\int_{\beta(x_1)}^{\beta(x_2)} g(x_2, y, u_1(\eta(y)), \dots, u_n(\eta(y))) dy\right| + \beta(\mathrm{T})\ \omega_{r_0}^T(g, \varepsilon)$$

$$\le\ V^{-1}\Big(\varphi\Big(V\ (\ |x_2 - x_1| + \left(\max\{\ |u_1(\xi(x_2)) - u_1(\xi(x_1))|, \dots, |u_{\mathrm{n}}(\xi(x_2)) - u_{\mathrm{n}}(\xi(x_1))|\}\ \right)$$

$$+ (\ \beta(x_2) - \beta(x_1))\ G_{r_0}^T(g, \varepsilon)\ + \beta(\mathrm{T})\ \omega_{r_0}^T(g, \varepsilon) \tag{۳ . ۸}$$

که در آن

$$\omega^T(\mu,\varepsilon)=\sup\{|\mu(t_2)-\mu(t_1)|: t_1,t_2\in[0,T], |t_1-t_2|\le\varepsilon\},$$

$$\omega^T(x,\omega^T(\mu,\varepsilon))=\sup\{|x(t_1)-x(t_2)|: t_1,t_2\in[0,T], |t_1-t_2|\le\omega^T(\mu,\varepsilon)\},$$

$$\beta(\mathrm{T})=\sup\{\,\beta(\mathrm{t})\ :\mathrm{t}\in[0,T]\}$$

$$G_{r_0}^T(g,\varepsilon)=\sup\{|g(\mathrm{x},a,u_1,\dots,u_\mathrm{n})|:\mathrm{x}\in[0,T], a\in[0,\beta(\mathrm{T})], u_1,\dots,u_\mathrm{n}\in[-r_0,r_0]\}$$

$$\omega_{r_0}^T(g,\varepsilon)=\sup\left\{\begin{matrix}|g(x_2,a,u_1,\dots,u_\mathrm{n})-g(x_1,a,u_1,\dots,u_\mathrm{n})|: x_1,x_2\in[0,T], |x_1-x_2|\le\varepsilon, a\in[0,\beta(\mathrm{T})],\\ u_1,\dots,u_\mathrm{n}\in[-r_0,r_0]\end{matrix}\right\}$$

چون $(u_1,\dots,u_\mathrm{n})$ یک عضو دلخواه $X_1\times\dots\times X_\mathrm{n}$ در (۳ . ۸) است لذا

$$\begin{aligned}\omega^L(F(X_1\times\dots\times X_\mathrm{n}),\varepsilon)&\\ \le\ & V^{-1}(\ \varphi(V(\ |x_2-x_1|\\ &+(\max\{\ \omega^T(u_1,\omega^T(\xi,\varepsilon)),\dots,\omega^T(u_n,\omega^T(\xi,\varepsilon))\})\\ &+(\beta(x_2)-\beta(x_1))\,G_{r_0}^T(g,\varepsilon)+\beta(\mathrm{T})\,\omega_{r_0}^T(g,\varepsilon).\end{aligned}$$

(۳ . ۹)

حال پیوستگی یکنواخت g روی $[0,\mathrm{T}]\times[0,\beta(\mathrm{T})]\times[-\mathrm{r}_0,\mathrm{r}_0]^\mathrm{n}$ و β روی $[0,\mathrm{T}]$ ایجاب می‌کند که $\omega_{\mathrm{r}_0}^\mathrm{T}(\mathrm{g},\varepsilon)\to 0$ و $(\beta(\mathrm{x}_2)-\beta(\mathrm{x}_1))\mathrm{G}_{\mathrm{r}_0}^\mathrm{T}(\mathrm{g},\varepsilon)\to 0$ وقتی $\varepsilon\to 0$. همچنین پیوستگی یکنواخت β و ξ روی $[0,\mathrm{T}]$ ایجاب می کند $\omega^\mathrm{L}(\xi,\varepsilon)\to 0$، $\omega^\mathrm{L}(\beta,\varepsilon)\to 0$ وقتی $\varepsilon\to 0$. بنابراین با حد گرفتن در (۳ . ۹) وقتی $\varepsilon\to 0$ داریم :

$$\omega_0^T\big(F(X_1\times\dots\times X_\mathrm{n})\big)\le V^{-1}(\ \varphi(V\ ((\max\{\ \omega_0^T(X_1),\dots,\omega_0^T(X_\mathrm{n})\})$$

(۳ . ۱۰)

حال اگر در (۳ . ۱۰) $T\to\infty$ آنگاه

$$\omega_0\big(F(X_1\times\dots\times X_\mathrm{n})\big)\le\ V^{-1}(\ \varphi(V\ (\ \ (\max\{\ \omega_0(X_1),\dots,\omega_0(X_\mathrm{n})\}) \qquad (۳ . ۱۱)$$

بعلاوه برای هر $(u_1,\dots,u_\mathrm{n}),(v_1,\dots,v_\mathrm{n})\in X_1\times\dots\times X_\mathrm{n}$ و $x\in\mathbb{R}_+$ دلخواه داریم :

$$\begin{aligned}&|F(u_1,\dots,u_\mathrm{n})(x)-F(v_1,\dots,v_\mathrm{n})(x)|\le\\ &V^{-1}(\ \varphi\ (V\ \ (\max\{\ \big|u_1\big(\xi(\mathrm{x})\big)-\ v_1\big(\xi(\mathrm{x})\big)\big|,\dots,\big|u_\mathrm{n}\big(\xi(\mathrm{x})\big)\\ &\qquad-\ v_\mathrm{n}\big(\xi(\mathrm{x})\big)\ \big|\big\}, 2\pi(x)\int_0^{\beta(x)}\varpi(y)dy\ \ )\end{aligned}$$

(۳ . ۱۲)

حال با استفاده از نامساوی (۳ . ۱۲) و مفهوم قطر یک مجموعه داریم :

$$diam\, F(X_1 \times \dots \times X_{\mathrm{n}})(x) \leq \; V^{-1}\,(\,\varphi\,(V \;\; (\max\{\max\{\; \mathrm{diam}\, X_1(\xi(\mathrm{x})), \dots ,$$
$$\mathrm{diam}\, X_{\mathrm{n}}(\xi(\mathrm{x}))\}, 2\pi(x)\int_0^{\beta(x)} \varpi(y)dy \;\;)$$

بنابراین ،

$$.\limsup_{x\to\infty} diamF((X_1 \times \dots \times X_{\mathrm{n}}))(x) \leq$$
$$V^{-1}\left(\varphi\left(V\left(\max\;\{\limsup_{x\to\infty}\;\mathrm{diam}\, X_1(\mathrm{x}), \dots , \limsup_{x\to\infty}\mathrm{diam}\, X_{\mathrm{n}}(x)\right\}\;\right)\right) \qquad (۳.۱۳)$$

سرانجام با تلفیق (۱۱ . ۳) و (۱۳ . ۳)

$$\mu\big(F(X_1 \times \dots \times X_{\mathrm{n}})\big) = \;\; \omega_0\big(F(X_1 \times \dots \times X_{\mathrm{n}})\big) + \limsup_{x\to\infty} diamF(X_1 \times \dots \times X_{\mathrm{n}})(x)$$
$$\leq \;\; V^{-1}\;\;(\,\varphi(V \quad (\max\{\;\omega_0(X_1), \dots , \omega_0(X_{\mathrm{n}})\}\,)\,+$$
$$V^{-1}\left(\varphi(V\,(\,\left(\max\{\limsup_{x\to\infty}\;\mathrm{diam}\, X_1(\mathrm{x}), \dots , \limsup_{x\to\infty}\mathrm{diam}\, X_{\mathrm{n}}(x)\right\}\right)$$
$$\leq \;\; V^{-1}(\varphi(V \quad (\max\{\;\mu(X_1), \dots , \mu(X_{\mathrm{n}})\}\,).$$

پس ،

$$V(\mu\,\big(F(X_1 \times \dots \times X_{\mathrm{n}})\big) \;\leq \varphi(V \;\; (\max\{\;\mu(X_1), \dots , \mu(X_{\mathrm{n}})\}$$

که در آن μ اندازه نافشردگی است. حال با توجه به نتیجه **۲۰۵** می توان گفت که F حداقل یک نقطه ثابت پرشیچ دارد. مشابه مباحث بالا می توان نتیجه گرفت که G نیزحداقل یک نقطه ثابت پرشیچ دارد. لذا $\Omega(\mathrm{t}) = \mathrm{F}(\mathrm{t}) \times \; G(t)$ نیزحداقل یک نقطه ثابت پرشیچ دارد. و اثبات تمام است.

۴- مثال

در این بخش یک مثال برای بررسی وجود جواب برای یک دستگاه از معادلات انتگرالی از نوع تصادفی ارائه می دهیم.

مثال ۴.۱: دستگاه معادلات انتگرال تابعی زیر را در نظر می گیریم

$$\begin{cases} U_1(\mathrm{x})=\frac{1}{5}e^{-x^2}+\frac{1}{3}\frac{\frac{\sum_{i=1}^{n}u_{\mathrm{i}}(\mathrm{x})}{7+x}}{1+\frac{\sum_{i=1}^{n}u_{\mathrm{i}}(\mathrm{x})}{7+x}}+\frac{1}{3}\frac{\int_0^{x^2}\frac{e^{-(x+y)}cos^2(\sum_{i=1}^{n}u_{\mathrm{i}}(\mathrm{y}))}{\cosh(7\sum_{i=1}^{n}u_{\mathrm{i}}(\mathrm{y}))}dy}{1+\int_0^{x^2}\frac{e^{-(x+y)}cos^2(\sum_{i=1}^{n}u_{\mathrm{i}}(\mathrm{y}))}{\cosh(7\sum_{i=1}^{n}u_{\mathrm{i}}(\mathrm{y}))}dy} \\ \vdots \\ U_{\mathrm{n}}(\mathrm{x})=\frac{1}{5}e^{-x^2}+\frac{1}{3}\frac{\frac{\sum_{i=1}^{n}u_{\mathrm{i}}(\mathrm{x})}{7+x}}{1+\frac{\sum_{i=1}^{n}u_{\mathrm{i}}(\mathrm{x})}{7+x}}+\frac{1}{3}\frac{\int_0^{x^2}\frac{e^{-(x+y)}cos^2(\sum_{i=1}^{n}u_{\mathrm{i}}(\mathrm{y}))}{\cosh(7\sum_{i=1}^{n}u_{\mathrm{i}}(\mathrm{y}))}dy}{1+\int_0^{x^2}\frac{e^{-(x+y)}cos^2(\sum_{i=1}^{n}u_{\mathrm{i}}(\mathrm{y}))}{\cosh(7\sum_{i=1}^{n}u_{\mathrm{i}}(\mathrm{y}))}dy} \end{cases} \quad (۴ . ۱)$$

با انتخاب های زیر به آسانی دیده می شود که این دستگاه یک حالت خاص از دستگاه معادلات انتگرال (۲ . ۳) است.

$$h(x,u_1,u_2,\dots u_n)=\frac{1}{5}e^{-x^2}+\frac{1}{3}\,\frac{\mathrm{U}_1}{1+\mathrm{U}_1}+\cdots+\frac{1}{3}\,\frac{\mathrm{U}_n}{1+\mathrm{U}_n}$$

$$g(x,y,u_1,\dots,u_n)=\frac{e^{-(x+y)}cos^2(\sum_{i=1}^{n}u_{\mathrm{i}}(\mathrm{y}))}{\cosh(7\sum_{i=1}^{n}u_{\mathrm{i}}(\mathrm{y}))}$$

$$f(x,u_1,u_2,\dots u_n)=1$$

$$\xi(t)=\mathrm{t},\qquad \eta(t)=\mathrm{t},\ \ \beta(t)=\mathrm{t}^2,\ \ t\geq 0$$

حال شرط های قضیه **۳۰۱** را بررسی می کنیم.

$$|h(x_1,\varrho_1\ ,\dots,\varrho_{\mathrm{n}})-h(x_2,\ \sigma_1\ ,\dots,\sigma_{\mathrm{n}})|$$

$$\leq \ln\frac{[\,e^{\frac{1}{5}|x_1-x_2|+\frac{1}{3}\left|\frac{\mathrm{u}_1}{1+\mathrm{u}_1}+\cdots+\frac{u_n}{1+u_n}-\frac{\mathrm{u'}_1}{1+u'_1}-\cdots-\frac{\mathrm{u'}_n}{1+u_n'}\right|}]^{\frac{1}{3}}}{3}$$

$$\leq\ \ln\frac{[\,e^{\frac{1}{5}|x_1-x_2|+\frac{1}{3}\left|\frac{\mathbf{u_1}-u_1'}{(1+\mathbf{u_1})(1+u_1')}\right|+\cdots+\left|\frac{\mathbf{u}_n-u_n'}{(1+\mathbf{u_1})(1+u_n')}\right|}]^{\frac{1}{3}}}{3}$$

$$\leq\ \ln\frac{[\,e^{1+|x_1-x_2|+\max\{|\mathbf{u_1}-u_1'|+\cdots+|\mathbf{u}_n-u_n'|\}}]^{\frac{1}{3}}}{3}$$

$$\leq \ \ln \frac{[e^{1+|x_1-x_2|+\max\{\,|\,\varrho_1\ -\ \sigma_1\ \ |+\cdots+\ \ |\varrho_n-\sigma_n\ |\,\}}\ ]^{\frac{1}{3}}}{3}$$

پس

$$|h(x_1,\varrho_1\ ,\dots\ ,\varrho_n)-h(x_2,\ \ \sigma_1\ ,\dots,\sigma_n)|$$

$$\leq\ V^{-1}\,(\varphi((V|x_1-x_2|+\max\{\,|\ \varrho_1\ -\ \sigma_1\ \ |\ +\cdots+\ \ |\varrho_n-\sigma_n\ \ |)$$

که در آن $V\,(\mathrm{x})=e^x \quad , \quad \varphi(x)=\frac{x^{\frac{1}{3}}}{3}$.

بعلاوه

$$\mathrm{N}=\sup\{|h(x,0,\cdots,0)|:x\in\mathbb{R}_+\}=\sup\left\{\left|\frac{1}{5}e^{-x^2}\right|:x\in\mathbb{R}_+\right\}\leq 0.2.$$

همچنین

$$|h(x,y,u_1,\dots,u_n)|\ =\ \left|\ \frac{e^{-(x+y)}cos^2(\sum_{i=1}^{n}\ u_{\mathrm{i}}(\mathrm{y}))}{\cosh(7\sum_{i=1}^{n}\ u_{\mathrm{i}}(\mathrm{y}))}\ \right|$$

$$\leq\ \ e^{-(x+y)}$$

$$\pi(x)=e^{-x}\ ,\ \varpi(y)=e^{-y}$$

بنابراین ،

از طرفی،

$$\mathrm{Z}=\sup\left\{\left|\int_0^{\beta(x)}\ \pi(x)\varpi(y)dy\right|\right\}=\sup\left\{\left|\int_0^{x^2}\ e^{-(x+y)}dy\right|:\ \ x,y\geq 0\right\}\ \cong 0.2338$$

همچنین برای هر $r\geq 0$

$$V^{-1}\,(\varphi(V(\max\{\mathrm{r},\mathrm{Z}\})))+N=\ln\frac{[e^{\max\{\mathrm{r}\ ,\ \ \ 0.2338\}}\ ]^{\frac{1}{3}}}{3}+0.2\leq\ln\left(\frac{e^{\{\frac{r}{3}\}}}{3}\right)+0.2\leq 3.2$$

بنابراین تمام شرایط قضیه **۳۰۱** برقرار است و دستگاه معادلات انتگرال (۱ . ۴) حداقل یک جواب در فضای $\left(BC(\mathbb{R}_+)\right)^n$ دارد.

تبصره ۴.۲: اگر در دستگاه معادلات انتگرالی (۲ . ۳) مقدار $i=2$ انتخاب شود و

$$h(t,u_1,u_2,\dots u_n)=\frac{1}{8}e^{-t^2}+\frac{t^2\ln(1+|x(t)|)}{6(2+t^2)}+\frac{e^{-\mathrm{t}}\ln(1+|y(t)|)}{4}+\ln\left(1+\frac{1}{3}\int_0^t\frac{sin\,(1+uy(u)+cos^2(ux(u)}{e^{t^2}}\,du\right)$$

$$f(t,u_1,u_2,\dots u_n)=1$$

به مثال ۲ . ۳ در مرجع [۹] می رسیم. لذا دستگاه معادلات انتگرالی (۲ . ۳) ما تعمیم و توسیع کار آنهاست.

۴- نتیجه گیری

دستگاه معادلات انتگرالی (۲ . ۳) حداقل یک جواب دارد و نتایج بدست آمده از این تحقیق توسیع دستگاه معادلات انتگرالی بررسی شده در مرجع [۹] است.

References

1. R.P. Agarwal, M. Meehan and D. O'Regan, Fixed point theory and applications, Cambridge University Press 2004.
2. R.R. Akmerov, M.I Kamenski, A.S. Potapov, A.E. Rodkina, B.N. Sadovskiii, Measures of Noncompactness and Condensing Operators, Birkhauser-Verlag, Basel, 1992.
3. I. Altun and D. Turkoglu, A fixed point theorem for mappings satisfying a general contractive condition of operator type, Journal of Computational Analysis and Applications. **9** (2007), 9-14.
4. R. Arab, Some fixed point theorems in generalized Darbo fixed point theorem and the existence of solutions for system of integral equations, J. Korean Math. Soc. **52** (2015). 125 − 139.
5. J. Banas′, One Measures of noncompactness in Banach spaces, Comment. Math.Univ. Carolin. **21** (1980), 131 − 143.
6. J. Banas′, K. Goebel, Measures of noncompactness in Banach Space. Lecture Notes in pure and Applied Mathematics, vol. 60, Marcel Dekker, New York, 1980.
7. S. Banaei, V. Parvaneh and M. Mursaleen, Measures of noncompactness and infinite systems of integral equations of Urysohn type in L^∞ (G), Carpathian J. Math. **37** (2021) 407-416.
8. G. Darbo, Punti uniti in trasformazioni a codominio non compatto, Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova, (1955), 84--92.
9. B. Hazarika , R. Arab and M. Mursaleen, Applications of measure of Non compactness and operator type contraction for existence of solution of functional integral equations, Complex Analysis and Operator Theory, **13** (2019), 3837–3851.
10. C. Kuratowski, Sur les espaces complets, Fundamenta Mathematicae. **15** (1930), 301-309.

11. A. C. H., Lee and W. J. Padgett , A Random Nonlinear Integral Equation in Population Growth Problems. Journal of Integral Equations, vol. **2**, no. **1**, (1980) 1–9.

12. B. Matani and J. R. Roshan, Multivariate generalized Meir-Keeler condensing operators and their applications to systems of integral equations. J. Fixed Point Theory Appl. (2020) 22:87.

13. H. Nasiri, J.R. Roshan and M. Mursaleen, Solvability of system of Volterra integral equations via measure of noncompactness, Comput. Appl. Math**. 40** (2021), 1-25.