



Kharazmi University

## A Result On the Diagonal of Contractible Operator Banach Algebras

**Maysam Maysami Sadr**Department of Mathematics, Institute for Advanced Studies in Basic Sciences, Zanjan, Iran. E-mail: [sadr@iasbs.ac.ir](mailto:sadr@iasbs.ac.ir)

Article Info	ABSTRACT
<b>Article type:</b> Research Article	<b>Introduction</b> A Banach algebra $A$ is called contractible if for any Banach $A$ -bimodule $E$ , every continuous derivation from $A$ into $E$ is inner. Contractibility is among of the various notions of amenability which have been defined after a very bold paper of Johnson on cohomology of Banach algebras. It is well-known that full matrix algebras and their finite direct sum are contractible. Also, every finite-dimensional contractible Banach algebra is of this form. One of the oldest unconfirmed conjectures in amenability says that every contractible Banach algebra is finite dimensional. The special case of this conjecture which is still unconfirmed says that for any Banach space $X$ , if the Banach algebra $B(X)$ of all bounded linear operators on $X$ , is contractible then $X$ is finite-dimensional.
<b>Article history:</b> Received: 8 October 2022 Received in revised form: 9 May 2023 Accepted: 30 May 2023 Published online: 19 February 2024	<b>Results and discussion</b> It is well-known that a Banach algebra $A$ is contractible if and only if it is unital and has a diagonal, that is a member $M$ in the Banach algebra $A \otimes_{\pi} A$ such that satisfies in $\Delta(M) = 1$ and $(a \otimes 1)M = M(1 \otimes a)$ for every $a$ in $A$ . Here, $\otimes_{\pi}$ denotes the completed projective tensor product of Banach spaces, and $\Delta: A \otimes_{\pi} A \rightarrow A$ is the unique bounded linear operator defined by $(a \otimes b) \mapsto ab$ . For a Banach space $X$ of finite dimension $m$ , $B(X)$ is isomorphic to the matrix algebra $M_m$ . It is well-known that $M_m$ has a unique diagonal of the form $m^{-1} \sum_{ij} \delta_{ij} \otimes \delta_{ji}$ where $\delta_{ij}$ 's denote the standard basis of $M_m$ . The aim of this short note is to prove a property (Theorem 6) for the diagonal of any contractible $B(X)$ when $X$ is infinite-dimensional. For the proof we use the famous estimate of Kadec and Snobar on the norms of projection operators on finite-dimensional subspaces. We hope that this property of diagonal and the technics we have used here, helps to solve the mentioned conjecture on finite-dimensionality of $X$ . Consider the following operator: $\Psi: B(X) \otimes_{\pi} B(X) \rightarrow B(X \otimes_{\pi} X), \quad \Psi(T \otimes S)(x \otimes y) = T(x) \otimes T(y).$ Then $\Psi$ is a Banach algebra homomorphism with norm equals to 1. We denote the image of $M \in B(X) \otimes_{\pi} B(X)$ under $\Psi$ by $M^{op}$ . The main result of this note is Theorem 6: <b>Theorem 6.</b> Suppose that there is an infinite-dimensional Banach space $X$ such that $B(X)$ is contractible. Then for every diagonal $M$ of $B(X)$ we have $M^{op} = 0$ .
<b>Keywords:</b> Banach algebra, Contractibility, Diagonal, Algebra of operators, Amenability.	

**How to cite:** Maysami Sadr, M., (2023). A result on the diagonal of contractible operator Banach algebras, *Mathematical Researches*, 9 (4), 178 – 185.



© The Author(s).

Publisher: Kharazmi University

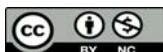
## نتیجه‌ای درباره قطر جبرهای بanax عملگری انقباض‌پذیر

میثم میثمی صدر

گروه ریاضی، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه، زنجان، ایران. رایانامه: [sadr@iasbs.ac.ir](mailto:sadr@iasbs.ac.ir)

اطلاعات مقاله	چکیده
نوع مقاله: مقاله پژوهشی	به یک جبر بanax $A$ انقباض‌پذیر گفته می‌شود هرگاه به ازای هر $A$ -دومدول بanax $E$ , هر اشتاقاق پیوسته از $A$ به $E$ درونی باشد. مفهوم انقباض‌پذیری در مبحث کوهمولوزی و میانگین‌پذیری جبرهای بanax ظاهر می‌گردد. تنها جبرهای بanax انقباض‌پذیری که تا کنون شناخته شده‌اند، از بعد متناهی هستند. درواقع، یکی از قدیمی‌ترین حدسه‌ها در این مبحث، عدم وجود جبرهای بanax انقباض‌پذیر با بعد نامتناهی است. حالت خاص این حدس، که آن نیز هنوز بی‌پاسخ است، می‌گوید که برای یک فضای بanax $X$ اگر $(X, \text{جبر} B)$ , ای شناخته شده، یک جبر بanax $A$ انقباض‌پذیر است اگر و فقط اگر عنصر ویژه‌ای بهنام قطر در $A \otimes_{\pi} A$ حاصلضرب تانسوری تصویری $A$ با خودش، موجود باشد. در این یادداشت کوتاه، نشان می‌دهیم که اگر $X$ از بعد نامتناهی باشد و $(X, \text{انقباض‌پذیر})$ باشد، آنگاه تصویر هر قطر $(X, B)$ , تحت نگاشت کانونی، در $(X, B)$ برابر با عملگر صفر است. برای اثبات از برآورده معروف کدک-اسنوبار درباره نرم عملگرهای تصویرگر روی زیرفضاهای با بعد متناهی، استفاده می‌کنیم. امیدواریم که دانستن چنین ویژگی قطر و روشی که در این یادداشت ارائه می‌کنیم، در آینده منجر به حل شدن حدس متناهی بعد بودن $X$ شود.
تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۷/۱۶	واژه‌های کلیدی:
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۲/۱۹	جبر بanax،
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۳/۹	انقباض‌پذیری،
تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۱۲/۱۰	قطر،
	جبر عملگرهای،
	میانگین‌پذیری.

استناد: میثمی صدر، میثم. (۱۴۰۲) نتیجه‌ای درباره قطر جبرهای بanax عملگری انقباض‌پذیر. *پژوهش‌های ریاضی*, ۹ (۴)، ۱۷۸ - ۱۸۵.



نویسنده‌ان.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

## ۱. مقدمه

فرض کنید  $A$  جبر بanax باشد. به  $A$  انقباض‌پذیر گفته می‌شود هرگاه به ازای هر  $A$ -دومدول بanax  $E$ ، هر اشتاقاق پیوسته از  $A$  به  $E$  درونی باشد. مفهوم انقباض‌پذیری در مبحث کوهمولوژی جبرهای بanax، گونه‌ای از مفاهیم متنوع و پرشمار میانگین‌پذیری است که پس از مقاله بسیار شاخص و جریان‌ساز جانسون [۳] معرفی شده‌اند. برای توضیحات مفصل در این زمینه مراجع [۴، ۵، ۶] را ببینید. می‌دانیم که جبرهای ماتریسی کامل و جمع مستقیم هر تعداد متناهی از آنها انقباض‌پذیر هستند. همچنین هر جبر بanax انقباض‌پذیر از بعد متناهی به این شکل می‌باشد ( قضیه ۱.۴ از مرجع [۶] را ببینید). این‌ها تنها مثال‌هایی از جبرهای بanax انقباض‌پذیر هستند که تا کنون شناخته شده‌اند. در واقع، یکی از قدیمی‌ترین پرسش‌های پاسخ داده‌نشده در میانگین‌پذیری جبرهای بanax (مسئله پانزدهم صفحه ۲۲۴ از مرجع [۵]) می‌پرسد که آیا هر جبر بanax انقباض‌پذیر از بعد متناهی است؟ حالت خاص این پرسش (مرجع [۱] و مسئله شانزدهم صفحه ۲۲۴ از مرجع [۵] را ببینید) که آن نیز هنوز پاسخ داده نشده‌است می‌پرسد که برای یک فضای بanax  $X$  آیا از انقباض‌پذیری  $(X, X) = B(X, X)$ ، جبر بanax همه عملگرهای خطی و کراندار از  $X$  به  $X$  می‌توان نتیجه گرفت که  $X$  از بعد متناهی است؟ برای آگاهی از حالت‌های خاص حل شده این مسائل، صفحه ۱۹۶ و بخش ۱.۴ از مرجع [۶] را ببینید.

می‌دانیم که (صفحه ۸۴ از مرجع [۵] را ببینید) جبر بanax  $A$  انقباض‌پذیر است اگر و فقط اگر  $A$  یکدار و دارای قطر باشد. مقصود از یک قطر برای  $A$  عنصری مانند  $M$  از جبر بanax  $A \otimes_{\pi} A$  می‌باشد که  $1 = \Delta(M)$  و به‌ازای هر  $a$  در  $A$

$$(a \otimes 1)M = M(1 \otimes a).$$

در این‌جا،  $\otimes_{\pi}$  ضرب تانسوری کامل شده فضاهای بanax را نشان می‌دهد و  $\Delta: A \otimes_{\pi} A \rightarrow A \otimes A$  نگاشت خطی منحصر‌بفرد و کرانداری است که با  $(a \otimes b) \mapsto ab$  (تعريف می‌شود. وقتی که  $X$  از بعد متناهی  $m$  می‌باشد،  $B(X)$  با جبر ماتریسی‌های  $m \times m$  یک‌ریخت است. میدانیم قطر این جبر منحصر‌بفرد و به‌شکل  $m^{-1}\Sigma_{ij}\delta_{ij} \otimes \delta_{ji}$  می‌باشد که در این‌جا  $\delta_{ij}$ ‌ها پایه استاندارد را نشان می‌دهند. (این مطلب را با اندکی دقت می‌توان از گزاره ۱ و اثبات لم ۳ در پایین نتیجه گرفت).

هدف از این یادداشت کوتاه بیان یک ویژگی (قضیه ۶) برای قطر جبر  $(X, B)$ ، وقتی که انقباض‌پذیر است، می‌باشد. در واقع، ثابت می‌کنیم که در این حالت تصویر هر قطر  $(X, B)$  تحت نگاشت کانونی در  $(X \otimes_{\pi} X, B)$  برابر با عملگر صفر است. برای اثبات از برآورده معروف کدک-اسنوبار (قضیه ۲۸.۶ از مرجع [۲]) درباره نرم عملگرهای تصویرگر روی زیرفضاهای از بعد متناهی استفاده خواهیم کرد. امیدواریم که دانستن این ویژگی کمک کند تا در آینده حدس اصلی این مبحث (یعنی، از بعد متناهی بودن  $X$ ) پاسخ داده شود.

**سپاسگذاری.** بدین وسیله مراتب امتنان خود را از داوران محترم بابت نکات ارزندهای که گوشزد فرمودند و مدت زمانی که برای خواندن مقاله صرف کردند، اعلام می‌دارم.

## ۲. نتایج

برای فضای بanax  $X$ ، همیختی جبری  $\Psi: B(X) \otimes_{\pi} B(X) \rightarrow B(X \otimes_{\pi} X)$  را با ضابطه

$$\Psi(T \otimes S)(x \otimes y) = T(x) \otimes S(y)$$

تعریف می‌کنیم. در زیر تعریف همیختی  $\Psi$  را به تفصیل شرح می‌دهیم: فرض کنید  $T$  و  $S$  در  $B(X)$  باشند نگاشت دوخطی  $T \odot S: X \times X \rightarrow X \otimes_{\pi} X$  تعیین شده باشد که  $x, y \in X$  را با ضابطه  $T(x) \otimes S(y) \mapsto T(x) \otimes S(y)$  از آنجایی که  $\otimes_{\pi}$  یک ضرب تانسوری اریب است (پیوست ۲.B از مرجع [۵] را ببینید) می‌دانیم که

$$\|T(x) \otimes S(y)\| = \|T(x)\| \|S(y)\|.$$

بنابراین نرم  $T \odot S$  بعنوان یک نگاشت دوخطی (یعنی مقدار عددی  $(\sup_{\|x\|, \|y\|=1} \|T(x) \otimes S(y)\|)$ ) تعیین شده است. از خواص ضرب تانسوری تصویری (پیوست ۲.B از مرجع [۵] را ببینید) می‌دانیم که عملگر خطی  $(T \otimes S)^{op}: X \otimes_{\pi} X \rightarrow X \otimes_{\pi} X$  موجود است که

$$(T \otimes S)^{op}(x \otimes y) = T \odot S(x, y)$$

و همچنین نرم عملگری  $(T \otimes S)^{op}$  نیز برابر با  $\|T\| \|S\|$  است. حال نگاشت دوخطی

$$\Psi_0: B(X) \times B(X) \rightarrow B(X \otimes_{\pi} X)$$

را با ضابطه  $\Psi_0(T, S) = \Psi(T \otimes S)$  تعریف می‌کنیم. نرم  $\Psi_0$  بعنوان یک نگاشت دوخطی برابر با ۱ است. بنابراین با استفاده دوباره از خواص ضرب تانسوری تصویری می‌دانیم که عملگر خطی منحصر بفرد  $\Psi$  از  $B(X) \otimes_{\pi} B(X)$  به  $B(X \otimes_{\pi} X)$  چنان موجود است که  $\Psi(\Psi(T \otimes S)) = \Psi_0(T, S) = 1$ . از خواص جبری ضرب تانسوری می‌توان دید که  $\Psi$  ضرب جبر بanax  $B(X \otimes_{\pi} X)$  را به ضرب جبر بanax  $B(X)$  منتقل می‌کند. تصویر یک عنصر  $M \in B(X)$  تحت  $\Psi$  را با  $M^{op}$  نشان می‌دهیم. از آنجایی که  $\Psi(M) = M$  داریم

$$\|M^{op}\| \leq \|M\|_{\pi}.$$

دقت کنید که در حالت کلی  $\Psi$  یک به یک نیست. (در واقع، همان‌گونه که نگاشت کانونی از  $X^* \otimes_{\pi} X^*$  به فضای عملگرهای هسته‌ای لزوماً یک به یک نیست (بخش ۶.۲ از مرجع [۷] را ببینید)، می‌توان نتیجه گرفت که  $\Psi$  نیز چنین است).

**گزاره ۱.** فرض کنید  $M$  عنصری در  $B(X) \otimes_{\pi} B(X)$  باشد به‌گونه‌ای که به‌ازای هر  $T$  در  $B(X)$  داشته باشیم

$$(T \otimes 1)M = M(1 \otimes T).$$

در این صورت، عملگر منحصر بفرد  $\Gamma$  در  $B(X)$  موجود است که

$$M^{op} = (1 \otimes \Gamma)^{op} F. \quad (1)$$

در اینجا،  $F$  عملگر جابه‌جاگر است:

$$F: X \otimes_{\pi} X \rightarrow X \otimes_{\pi} X, \quad (x \otimes y) \mapsto (y \otimes x).$$

اثبات. فرض کنید  $y \in X$  ناصرف باشد. فرض کنید تابع خطی و کراندار  $f$  روی  $X$  چنان باشد که  $f(y) = 1$ . عملگر  $T$  اثبات. فرض کنید  $y \in X$  ناصرف باشد. فرض کنید تابع خطی و کراندار  $f$  روی  $X$  چنان باشد که  $f(y) = 1$ . عملگر  $T$  در  $(T \otimes 1)^{op} M^{op} = M^{op} (1 \otimes T)^{op}$  تعريف می‌کنیم. بنابراین، به‌ازای هر  $x$  داریم

$$(T \otimes 1)^{op} M^{op} (x \otimes y) = M^{op} (x \otimes y). \quad (2)$$

فضای  $X$  را می‌توان به صورت  $[[y]] \oplus \text{ker}(f)$  تجزیه کرد که در اینجا  $[[y]]$  زیرفضای یک بعدی تولید شده توسط  $y$  را نشان می‌دهد. بنابراین داریم

$$X \otimes_{\pi} X \cong ([[y]] \otimes_{\pi} X) \oplus (\text{ker}(f) \otimes_{\pi} X) = ([[y]] \otimes X) \oplus (\text{ker}(f) \otimes_{\pi} X).$$

در اینجا  $\cong$  بمعنی همسان‌ریختی خطی بین دو فضای بanax است. همچنین دقت کنید که ضرب تansوری یک فضای بanax دلخواه با یک فضای خطی متناهی بعد، با ضرب تansوری جبری دو فضا یکسان است. (تمرین 2.18.B از مرجع [۵] را ببینید). لذا  $z$  در  $X$  و  $w$  در  $\text{ker}(f) \otimes_{\pi} X$  موجودند که

$$M^{op} (x \otimes y) = y \otimes w + z.$$

حال از (2) نتیجه می‌شود که  $M^{op} (x \otimes y) = y \otimes w$ . به سادگی دیده می‌شود که تناظر  $w \mapsto x$  خطی است. بنابراین نگاشت خطی  $M^{op} (x \otimes y) = y \otimes \Gamma_y(x)$  کرانداری نگاشت  $\Gamma_y$  از کرانداری نگاشت  $x \mapsto M^{op} (x \otimes y)$  نتیجه می‌شود.

فرض کنید  $y, y'$  در  $X$  مستقل خطی باشند. داریم

$$M^{op} (x \otimes (y + y')) = y \otimes \Gamma_y(x) + y' \otimes \Gamma_{y'}(x)$$

۹

$$M^{op} (x \otimes (y + y')) = (y + y') \otimes \Gamma_{y+y'}(x).$$

بنابراین  $\Gamma_y = \Gamma_{y'}$  همچنین دیده می‌شود که به‌ازای هر اسکالر  $\lambda \neq 0$  داریم  $\Gamma_{\lambda y} = \Gamma_y$ . بنابراین نگاشت خطی و کراندار  $\Gamma$  روی  $X$  چنان موجود است که  $M^{op} (x \otimes y) = y \otimes \Gamma(x)$  به عبارت دیگر (1) برقرار است. ■ گزاره جالب زیر را نیز داریم.

**گزاره ۲.** همراه با مفروضات گزاره ۱ فرض کنید که  $M$  متقابن باشد، یعنی  $M$  تحت نگاشت جابه‌جاگر

$$\bar{F}: B(X) \otimes_{\pi} B(X) \rightarrow B(X) \otimes_{\pi} B(X), \quad (T \otimes S) \mapsto (S \otimes T)$$

به خودش نگاشته شود. در این صورت،  $\Gamma$  مضرب اسکالری از عملگر همانی است.

اثبات. می‌دانیم  $D_{n+1}(T_n)_n$  و  $B(X)_{n+1}$  در  $(S_n)_n$  چنان موجودند که سری  $\sum_n T_n \otimes S_n$  بطور مطلق به  $M$  همگر است. داریم

$$[\bar{F}(M)]^{op}(x \otimes y) = \sum_n (S_n \otimes T_n)^{op}(x \otimes y) = \sum_n (F(T_n \otimes S_n)^{op} F)(x \otimes y).$$

بنابراین،  $FM^{op}F = M^{op} \bar{F}(M) = M$ . پس از این اتحاد همراه با (۱) نتیجه می‌شود که  $F(1 \otimes \Gamma)^{op} = (1 \otimes \Gamma)^{op} F$  بنابراین، به ازای هر  $x$  و  $y$  داریم

$$\Gamma(y) \otimes x = y \otimes \Gamma(x).$$

این نشان می‌دهد که  $\Gamma$  مضرب همانی است. ■

فرض کنید  $Z, Y', Y$  فضاهای بanax از بعد متناهی باشند. نگاشت  $\Psi$  را مشابه بالا در نظر بگیرید:

$$\Psi: B(Y, Z) \otimes_{\pi} B(Z, Y') \rightarrow B(Y \otimes_{\pi} Z, Z \otimes_{\pi} Y'), \quad N \mapsto N^{op}.$$

واضح است که  $\Psi$  عملگر خطی یک به یک است. پس چون بعد دامنه و برد آن متناهی و برابرند لذا پوشانیز است.

لم ۳. همراه با مفروضات بالا، فرض کنید  $\dim(Z) = m$  و  $\dim(Y) = \dim(Y')$ . فرض کنید  $T: Y \rightarrow Y'$  یک ریختی خطی باشد و قرار دهید

$$L: Y \otimes_{\pi} Z \rightarrow Z \otimes_{\pi} Y', \quad (y \otimes z) \mapsto (z \otimes T(y)).$$

در این صورت ثابت عددی مثبت  $c$  که از فضای  $Z$  (نرم و بعد) مستقل است موجود است که

$$\|\Psi^{-1}(L)\|_{\pi} \geq c^{-1}m.$$

اثبات. فرض کنید  $y_1, \dots, y_k$  پایه‌ای برای  $Z$  باشد. قرار دهید  $T(y_i) = y'_i$  و  $y'_i$  پایه‌ای برای  $Y$  باشد. فرض کنید  $S'_{ji}: Z \rightarrow Y'$  و  $S_{ij}: Y \rightarrow Z$  را با خطی

$$S'_{ji}(z_j) = y'_i, \quad S'_{ji}(z_p) = 0 \quad (p \neq j), \quad S_{ij}(y_i) = z_j, \quad S_{ij}(y_q) = 0 \quad (q \neq i)$$

تعريف کنید. قرار دهید  $N = \sum_{i,j} S_{ij} \otimes S'_{ji}$ . در نتیجه  $N^{op} = L$ . به سادگی دیده می‌شود که  $\Psi^{-1}(L) = N$ . برای  $f: U \rightarrow Y'$  را برابر اثر بهنجارشده  $(k^{-1} \text{trace}) f(U)$  ماتریس متناظر با  $U$  نسبت به پایه‌های  $y'_1, \dots, y'_k$  تعریف می‌کنیم. بنابراین  $f$  یک تابع خطی کراندار و ناصرف روی  $B(Y, Y')$  است. اگر نرم تابعکی  $f$  را  $c$  فرض کنیم، آنگاه بهوضوح  $c$  از فضای  $Z$  مستقل است. تابعک دوخطی

$$g: B(Y, Z) \times B(Z, Y') \rightarrow \mathbb{C}$$

را به صورت زیر تعريف می‌کنیم:

$$g(P, Q) = f(QP).$$

نرم  $g$  بعنوان یک تابعک دوخطی از  $C$  بزرگتر نیست. در واقع:

$$\text{Sup}_{\|P\|, \|Q\|=1} |f(QP)| \leq \text{Sup}_{\|P\|, \|Q\|=1} \|f\| \|Q\| \|P\| \leq c.$$

بنابراین اگر  $\bar{g}: B(Y, Z) \otimes_{\pi} B(Z, Y') \rightarrow \mathbb{C}$  تابعک خطی تعریف شده با

$$\bar{g}(P \otimes Q) = g(P, Q)$$

را نشان دهد، آنگاه از خواص ضرب تانسوری تصویری می‌دانیم که نرم  $\bar{g}$  نیز بزرگتر از  $c$  نیست. پس داریم

$$|c^{-1}\bar{g}(N)| \leq \|N\|_{\pi}.$$

از طرف دیگر داریم

$$\bar{g}(N) = \bar{g}(\sum_{i,j} S_{ij} \otimes S'_{ji}) = \sum_{i,j} f(S'_{ji} S_{ij}) = \sum_{i,j} 1/k = m.$$

■ اثبات کامل است.

به گزاره زیر که بیانی از قضیه معروف کَدِک-اسنوبار (قضیه ۲۸.۶ از مرجع [۲]) است نیاز خواهیم داشت.

**گزاره ۴.** فرض کنید  $X$  فضای باناخ و  $Z$  زیرفضای برداری  $X$  از بعد متناهی  $m$  باشد. در اینصورت، به ازای هر  $\varepsilon < 0$  یک عملگر خطی تصویری  $P_Z: X \rightarrow Z$  چنان موجود است که  $\|P_Z\| < \sqrt{m} + \varepsilon$ .

**گزاره ۵.** همراه با مفروضات گزاره ۱، فرض کنید  $M^{op} \neq 0$  یا به صورت هم‌ارز  $\Gamma \neq \Gamma$ . در این صورت  $X$  از بعد متناهی است. اثبات. بردارهای ناصرف  $y, y'$  در  $X$  موجودند که  $y' \in \Gamma(y)$ . فرض کنید  $Y, Y'$  به ترتیب زیرفضاهای یک بعدی تولید شده توسط  $y, y'$  باشند. عملگر خطی  $T: Y \rightarrow Y'$  را برابر با تحدید  $\Gamma$  به  $Y$  تعریف کنید. فرض کنید  $Z$  زیرفضای برداری  $D$  دلخواهی از بعد  $m$  در  $X$  باشد. فرض کنید  $E_Y: Y \rightarrow X$  و  $E_Z: Z \rightarrow X$  نگاشتهای نشاننده باشند و  $Y' \rightarrow Z$  نگاشت تصویرگر پیوسته دلخواهی باشد. از گزاره ۴ می‌دانیم یک نگاشت تصویری پیوسته

$$P_Z: X \rightarrow Z$$

چنان موجود است که  $\|P_Z\| < \sqrt{m} + 1$ . قرار دهیم:

$$N = (P_Z \otimes P_{Y'})M(E_Y \otimes E_Z) \in B(Y, Z) \otimes_{\pi} B(Z, Y').$$

می‌توان بررسی کرد که  $N^{op} = L \otimes N \otimes L$  با  $L \in \mathcal{L}_m^3$  تعریف شده باشد. حال از  $\mathcal{L}_m^3$  نتیجه می‌شود که

$$m(\sqrt{m} + 1)^{-1}c^{-1} \|P_{Y'}\|^{-1} \leq \|M\|_{\pi}.$$

بنابراین بعد زیرفضای دلخواه  $Z$  از بالا کراندار است. عبارت دیگر  $X$  از بعد متناهی است. ■

قضیه زیر، که نتیجه اصلی مقاله است، مستقیماً از گزاره ۵ نتیجه می‌شود.

قضیه ۶. فرض کنید فضای باناخ نامتناهی بعد  $X$  موجود باشد به‌گونه‌ای که  $(B(X)$  انقباض‌پذیر باشد. در این صورت به‌ازای

$$\text{هر قطر } M \text{ از } B(X) \text{ باید داشته باشیم} \quad M^{op} = 0$$

## References

1. N. Grønbæk, Various notions of amenability, a survey of problems, Proceedings of 13th International Conference on Banach Algebras in Blaubeuren, 1997, Walter de Gruyter, Berlin, (1998), 535-547.
2. M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos, and V. Zizler, Banach space theory: The basis for linear and nonlinear analysis, CMS Books in Mathematics, Springer, New York, 2011.
3. B. E. Johnson, Cohomology in Banach algebras, Memoirs of the American Mathematical Society, vol. **127**, 1972.
4. O. T. Mewomo, Various notions of amenability in Banach algebras, *Expositiones Mathematicae* **29**, (2011), 283-299.
5. V. Runde, Lectures on amenability, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2002.
6. V. Runde, Amenable Banach algebras, Springer Monographs in Mathematics, Science+Business Media, Berlin, 2020.
7. R. A. Ryan, Introduction to tensor products of Banach spaces, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, London, 2002.