Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://jemr.khu.ac.ir/

A Result On the Diagonal of Contractible Operator Banach Algebras

Maysam Maysami Sadr

Department of Mathematics, Institute for Advanced Studies in Basic Sciences, Zanjan, Iran. E-mail: sadr@iasbs.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 8 October 2022
Received in revised form: 9 May 2023
Accepted: 30 May 2023
Published online: 19 February 2024

Keywords:
Banach algebra,
Contractibility,
Diagonal,
Algebra of operators,
Amenability.

ABSTRACT

Introduction

A Banach algebra A is called contractible if for any Banach A-bimodule E, every continuous derivation from A into E is inner. Contractibility is among of the various notions of amenability which have been defined after a very bold paper of Johnson on cohomology of Banach algebras. It is well-known that full matrix algebras and their finite direct sum are contractible. Also, every finite-dimensional contractible Banach algebra is of this form. One of the oldest unconfirmed conjectures in amenability says that every contractible Banach algebra is finite dimensional. The special case of this conjecture which is still unconfirmed says that for any Banach space X, if the Banach algebra $B(X)$ of all bounded linear operators on X, is contractible then X is finite-dimensional.

Results and discussion

It is well-known that a Banach algebra A is contractible if and only if it is unital and has a diagonal, that is a member M in the Banach algebra $A \otimes_\pi A$ such that satisfies in $\Delta(M) = 1$ and $(a \otimes 1)M = M(1 \otimes a)$ for every a in A. Here, $\otimes_\pi$ denotes the completed projective tensor product of Banach spaces, and $\Delta: A \otimes_\pi A \to A$ is the unique bounded linear operator defined by $(a \otimes b) \longmapsto ab$. For a Banach space X of finite dimension m, $B(X)$ is isomorphic to the matrix algebra $\mathbb{M}_m$. It is well-known that $\mathbb{M}_m$ has a unique diagonal of the form $m^{-1}\Sigma_{ij}\delta_{ij} \otimes \delta_{ji}$ where δ_{ij}'s denote the standard basis of $\mathbb{M}_m$.
The aim of this short note is to prove a property (Theorem 6) for the diagonal of any contractible $B(X)$ when X is infinite-dimensional. For the proof we use the famous estimate of Kadec and Snobar on the norms of projection operators on finite-dimensional subspaces. We hope that this property of diagonal and the technics we have used here, helps to solve the mentioned conjecture on finite-dimensionality of X. Consider the following operator:

$$\Psi: B(X) \otimes_\pi B(X) \longrightarrow B(X \otimes_\pi X), \qquad \Psi(T \otimes S)(x \otimes y) = T(x) \otimes T(y).$$

Then Ψ is a Banach algebra homomorphism with norm equals to 1. We denote the image of $M \in B(X) \otimes_\pi B(X)$ under Ψ by M^{op}. The main result of this note is Theorem 6:

Theorem 6. Suppose that there is an infinite-dimensional Banach space X such that $B(X)$ is contractible. Then for every diagonal M of $B(X)$ we have $M^{op} = 0$.

How to cite: Maysami Sadr, M., (2023). A result on the diagonal of contractible operator Banach algebras, *Mathematical Researches*, 9 (4), 178 – 185.

 Publisher: Kharazmi University

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

نتیجه‌ای درباره قطر جبرهای باناخ عملگری انقباض‌پذیر

میثم میثمی صدر

گروه ریاضی، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم‌پایه، زنجان، ایران. رایانامه: sadr@iasbs.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۷/۱۶
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۲/۱۹
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۳/۹
تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۱۲/۱۰

واژه‌های کلیدی:
جبر باناخ،
انقباض‌پذیری،
قطر،
جبر عملگرها،
میانگین‌پذیری.

چکیده

به یک جبر باناخ A انقباض‌پذیر گفته می‌شود هرگاه به ازای هر A-دومدول باناخ E، هر اشتقاق پیوسته از A به E درونی باشد. مفهوم انقباض‌پذیری در مبحث کوهمولوژی و میانگین‌پذیری جبرهای باناخ ظاهر می‌گردد. تنها جبرهای باناخ انقباض‌پذیری که تا کنون شناخته شده اند، از بعد متناهی هستند. درواقع، یکی از قدیمی‌ترین حدس‌ها در این مبحث، عدم وجود جبرهای باناخ انقباض‌پذیر با بعد نامتناهی است. حالت خاص این حدس، که آن نیز هنوز بی‌پاسخ است، می‌گوید که برای یک فضای باناخ X اگر $B(X)$، جبر باناخ همه عملگرهای خطی و پیوسته روی X، انقباض‌پذیرباشد آنگاه X از بعد متناهی است. براساس نتیجه ای شناخته شده، یک جبر باناخ A انقباض‌پذیر است اگر و فقط اگر عنصر ویژه‌ای به‌نام قطر در $A \otimes_\pi A$، حاصلضرب تانسوری تصویری A با خودش، موجود باشد. در این یادداشت کوتاه، نشان می‌دهیم که اگر X از بعد نامتناهی باشد و $B(X)$ انقباض‌پذیر باشد، آنگاه تصویر هر قطر $B(X)$، تحت نگاشت کانونی، در $B(X \otimes_\pi X)$ برابر با عملگر صفر است. برای اثبات از برآورد معروف کَدِک-اسنوبار درباره نرم عملگرهای تصویرگر روی زیرفضاهای با بعد متناهی، استفاده می‌کنیم. امیدواریم که دانستن چنین ویژگی قطر و روشی که در این یادداشت ارائه می‌کنیم، در آینده منجر به حل شدن حدس متناهی بعد بودن X شود.

استناد: میثمی صدر، میثم. (۱۴۰۲) نتیجه‌ای درباره قطر جبرهای باناخ عملگری انقباض‌پذیر. *پژوهش‌های ریاضی*، ۹ (۴)، ۱۷۸ – ۱۸۵.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

۱. مقدمه

فرض کنید A جبر باناخ باشد. به A انقباض‌پذیر گفته می‌شود هرگاه به ازای هر A-دومدول باناخ E، هر اشتقاق پیوسته از A به E درونی باشد. مفهوم انقباض‌پذیری در مبحث کوهمولوژی جبرهای باناخ، گونه‌ای از مفاهیم متنوع و پرشمار میانگین‌پذیری است که پس از مقاله بسیار شاخص و جریان‌ساز جانسون [۳] معرفی شده‌اند. برای توضیحات مفصل در این زمینه مراجع [۴، ۵، ۶] را ببینید. می‌دانیم که جبرهای ماتریسی کامل و جمع مستقیم هر تعداد متناهی از آنها انقباض‌پذیر هستند. همچنین هر جبر باناخ انقباض‌پذیر از بعد متناهی به این شکل می‌باشد (قضیه ۲.۱.۴ از مرجع [۶] را ببینید) . این‌ها تنها مثال‌هایی از جبرهای باناخ انقباض‌پذیر هستند که تا کنون شناخته شده‌اند. در واقع، یکی از قدیمی‌ترین پرسش‌های پاسخ داده‌نشده در میانگین‌پذیری جبرهای باناخ (مسئله پانزدهم صفحه ۲۲۴ از مرجع [۵]) می‌پرسد که آیا هر جبر باناخ انقباض‌پذیر از بعد متناهی است؟ حالت خاص این پرسش (مرجع [۱] و مسئله شانزدهم صفحه ۲۲۴ از مرجع [۵] را ببینید) که آن نیز هنوز پاسخ داده نشده‌است می‌پرسد که برای یک فضای باناخ X، آیا از انقباض‌پذیری $B(X)=B(X,X)$، جبر باناخ همه عملگرهای خطی و کراندار از X به X، می‌توان نتیجه گرفت که X از بعد متناهی است؟ برای آگاهی از حالت‌های خاص حل‌شده این مسائل، صفحه ۱۹۶ و بخش ۱.۴ از مرجع [۶] را ببینید.

می‌دانیم که (صفحه ۸۴ از مرجع [۵] را ببینید) جبر باناخ A انقباض‌پذیر است اگر و فقط اگر A یک‌دار و دارای قطر باشد. مقصود از یک قطر برای A عنصری مانند M از جبر باناخ $A \otimes_\pi A$ می‌باشد که $\Delta(M)=1$ و به‌ازای هر a در A،

$$(a \otimes 1)M = M(1 \otimes a).$$

دراین‌جا، $\otimes_\pi$ ضرب تانسوری تصویری کامل شده فضاهای باناخ را نشان می‌دهد و $\Delta: A \otimes_\pi A \to A$ نگاشت خطی منحصربفرد و کرانداری است که با $(a \otimes b) \longmapsto ab$ تعریف می‌شود. وقتی که X از بعد متناهی m می‌باشد، $B(X)$ با جبر ماتریسهای $m \times m$ یکریخت است. میدانیم قطر این جبر منحصربفرد و به‌شکل $m^{-1}\Sigma_{ij}\delta_{ij} \otimes \delta_{ji}$ می‌باشد که دراین‌جا δ_{ij} ها پایه استاندارد را نشان می‌دهند. (این مطلب را با اندکی دقت می‌توان از گزاره ۱ و اثبات لم ۳ در پایین نتیجه گرفت.)

هدف از این یادداشت کوتاه بیان یک ویژگی (قضیه ۶) برای قطر جبر $B(X)$، وقتی که انقباض‌پذیر است، می‌باشد. درواقع، ثابت می‌کنیم که در این حالت تصویر هر قطر $B(X)$ تحت نگاشت کانونی در $B(X \otimes_\pi X)$ برابر با عملگر صفر است. برای اثبات از برآورد معروف کَدِک-اسنوبار (قضیه ۲۸.۶ از مرجع [۲]) درباره نرم عملگرهای تصویرگر روی زیرفضاهای از بعد متناهی استفاده خواهیم کرد. امیدواریم که دانستن این ویژگی کمک کند تا در آینده حدس اصلی این مبحث (یعنی، از بعد متناهی بودن X) پاسخ داده شود.

سپاسگذاری. بدین وسیله مراتب امتنان خود را از داوران محترم بابت نکات ارزنده‌ای که گوشزد فرمودند و مدت زمانی که برای خواندن مقاله صرف کردند، اعلام می‌دارم.

۲. نتایج

برای فضای باناخ X، همریختی جبری $\Psi: B(X) \otimes_\pi B(X) \longrightarrow B(X \otimes_\pi X)$ را با ضابطه

$$\Psi(T \otimes S)(x \otimes y) = T(x) \otimes S(y)$$

تعریف می‌کنیم. در زیر تعریف همریختی Ψ را به‌تفصیل شرح می‌دهیم: فرض کنید T و S در $B(X)$ باشند نگاشت دوخطی $T \odot S: X \times X \longrightarrow X \otimes_\pi X$ را با ضابطه $(x, y) \mapsto T(x) \otimes S(y)$ تعریف می‌کنیم. از آنجایی که $\otimes_\pi$ یک ضرب تانسوری اریب است (پیوست B.2 از مرجع [۵] را ببینید) می‌دانیم که

$$\| T(x) \otimes S(y) \| = \| T(x) \| \| S(y) \|.$$

بنابراین نرم $T \odot S$ بعنوان یک نگاشت دوخطی (یعنی مقدار عددی $\| T(x) \otimes S(y) \|$ $sup_{\|x\|, \|y\|=1}$)

برابر با $\| T \| \| S \|$ است. از خواص ضرب تاسوری تصویری (پیوست B.2 از مرجع [۵] را ببینید) می‌دانیم که عملگر خطی منحصربفرد و کراندار $(T \otimes S)^{op}: X \otimes_\pi X \longrightarrow X \otimes_\pi X$ موجود است که

$$(T \otimes S)^{op}(x \otimes y) = T \odot S(x, y)$$

و همچنین نرم عملگری $(T \otimes S)^{op}$ نیز برابر با $\| T \| \| S \|$ است. حال نگاشت دوخطی

$$\Psi_0: B(X) \times B(X) \longrightarrow B(X \otimes_\pi X)$$

را با ضابطه $(T, S) \mapsto (T \otimes S)^{op}$ تعریف می‌کنیم. نرم Ψ_0 بعنوان یک نگاشت دوخطی برابر با ۱ است. بنابراین با استفاده دوباره از خواص ضرب تانسوری تصویری می‌دانیم که عملگر خطی منحصربفرد Ψ از $B(X) \otimes_\pi B(X)$ به $B(X \otimes_\pi X)$ چنان موجود است که $\Psi(T \otimes S) = \Psi_0 (\mathrm{T}, \mathrm{S})$. همچنین داریم $\| \Psi \| = 1$. از خواص جبری ضرب تانسوری می‌توان دید که Ψ ضرب جبر باناخ $B(X) \otimes_\pi B(X)$ را به ضرب جبر باناخ $B(X \otimes_\pi X)$ منتقل می‌کند.

تصویر یک عنصر $M \in B(X) \otimes_\pi B(X)$ تحت Ψ را با M^{op} نشان می‌دهیم. از آنجایی که $\| \Psi \| = 1$ داریم

$$\| M^{op} \| \leq \| M \|_\pi.$$

دقت کنید که در حالت کلی Ψ یک به یک نیست. (در واقع، همان‌گونه که نگاشت کانونی از $X^* \otimes_\pi X^*$ به فضای عملگرهای هسته‌ای لزوما یک به یک نیست (بخش ۶.۲ از مرجع [۷] را ببینید)، می‌توان نتیجه گرفت که Ψ نیز چنین است.)

گزاره ۱. فرض کنید M عنصری در $B(X) \otimes_\pi B(X)$ باشد به‌گونه‌ای که به‌ازای هر T در $B(X)$ داشته باشیم

$$(T \otimes 1)M = M(1 \otimes T).$$

در این‌صورت، عملگر منحصربفرد Γ در $B(X)$ موجود است که

$$M^{op} = (1 \otimes \Gamma)^{op} F. \qquad (۱)$$

در این‌جا، F عملگر جابه‌جاگر است:

$$F: X \otimes_\pi X \longrightarrow X \otimes_\pi X, \qquad (x \otimes y) \longmapsto (y \otimes x).$$

اثبات. فرض کنید $y \in X$ ناصفر باشد. فرض کنید تابعک خطی و کراندار f روی X چنان باشد که $f(y) = 1$. عملگر T در $B(X)$ را با $x \mapsto f(x)y$ تعریف می‌کنیم. داریم $(T \otimes 1)^{op} M^{op} = M^{op}(1 \otimes T)^{op}$. بنابراین، به‌ازای هر x داریم

$$(T \otimes 1)^{op} M^{op}(x \otimes y) = M^{op}(x \otimes y). \qquad (۲)$$

فضای X را می‌توان به‌صورت $[[y]] \oplus ker(f)$ تجزیه کرد که در اینجا $[[y]]$ زیرفضای یک‌بعدی تولید شده توسط y را نشان می‌دهد. بنابراین داریم

$$X \otimes_\pi X \cong ([[y]] \otimes_\pi X) \oplus (ker(f) \otimes_\pi X) = ([[y]] \otimes X) \oplus (ker(f) \otimes_\pi X).$$

در اینجا $\cong$ بمعنی همسانریختی خطی بین دو فضای باناخ است. همچنین دقت کنید که ضرب تانسوری یک فضای باناخ دلخواه با یک فضای خطی متناهی بعد، با ضرب تانسوری جبری دو فضا یکسان است. (تمرین B.2.18 از مرجع مرجع [۵] را ببینید.) لذا z در $ker(f) \otimes_\pi X$ و w در X موجودند که

$$M^{op}(x \otimes y) = y \otimes w + z.$$

حال از (۲) نتیجه می‌شود که $M^{op}(x \otimes y) = y \otimes w$. به‌سادگی دیده می‌شود که تناظر $x \mapsto w$ خطی است. بنابراین نگاشت خطی $\Gamma_y: X \to X$ موجود است که $M^{op}(x \otimes y) = y \otimes \Gamma_y(x)$. کرانداری نگاشت Γ_y از کرانداری نگاشت $x \mapsto M^{op}(x \otimes y)$ نتیجه می‌شود.

فرض کنید y', y در X مستقل خطی باشند. داریم

$$M^{op}(x \otimes (y + y')) = y \otimes \Gamma_y(x) + y' \otimes \Gamma_{y'}(x)$$

و

$$M^{op}(x \otimes (y + y')) = (y + y') \otimes \Gamma_{y+y'}(x).$$

بنابراین $\Gamma_y = \Gamma_{y'}$. همچنین دیده می‌شود که به‌ازای هر اسکالر $\lambda \neq 0$ داریم $\Gamma_{\lambda y} = \Gamma_y$. بنابراین نگاشت خطی و کراندار Γ روی X چنان موجود است که $M^{op}(x \otimes y) = y \otimes \Gamma(x)$. به‌عبارت دیگر (۱) برقرار است. ■

گزاره جالب زیر را نیز داریم.

گزاره ۲. همراه با مفروضات گزاره ۱ فرض کنید که M متقارن باشد، یعنی M تحت نگاشت جابه‌جاگر

$$\bar{F}: B(X) \otimes_\pi B(X) \longrightarrow B(X) \otimes_\pi B(X), \qquad (T \otimes S) \mapsto (S \otimes T)$$

به خودش نگاشته شود. در این‌صورت، Γ مضرب اسکالری از عملگر همانی است.

اثبات. می‌دانیم دنباله‌های $(T_n)_n$ و $(S_n)_n$ در $B(X)$ چنان موجودندکه سری $\sum_n T_n \otimes S_n$ بطور مطلق به M همگراست. داریم

$$[\bar{F}(M)]^{op}(x \otimes y) = \sum_n (S_n \otimes T_n)^{op}(x \otimes y) = \sum_n (F(T_n \otimes S_n)^{op} F)(x \otimes y).$$

بنابراین، $[\bar{F}(M)]^{op} = FM^{op}F$. پس از $\bar{F}(M) = M$ داریم $FM^{op}F = M^{op}$. از این اتحاد همراه با (۱) نتیجه می‌شود که $F(1 \otimes \Gamma)^{op} = (1 \otimes \Gamma)^{op} F$. بنابراین، به‌ازای هر x و y داریم

$$\Gamma(y) \otimes x = y \otimes \Gamma(x).$$

این نشان می‌دهد که Γ مضرب همانی است. ■

فرض کنید Z, Y', Y فضاهای باناخ از بعد متناهی باشند. نگاشت Ψ را مشابه بالا درنظر بگیرید:

$$\Psi: B(Y,Z) \otimes_\pi B(Z,Y') \longrightarrow B(Y \otimes_\pi Z, Z \otimes_\pi Y'), \quad N \mapsto N^{op}.$$

واضح است که Ψ عملگر خطی یک به یک است. پس چون بعد دامنه و برد آن متناهی و برابرند لذا پوشا نیز است.

لم ۳. همراه با مفروضات بالا، فرض کنید $dim(Y) = dim(Y')$ و $dim(Z) = m$. فرض کنید $T: Y \longrightarrow Y'$ یکریختی خطی باشد و قرار دهید

$$L: Y \otimes_\pi Z \longrightarrow Z \otimes_\pi Y', \qquad (y \otimes z) \longmapsto (z \otimes T(y)).$$

در این‌صورت ثابت عددی مثبت c که از فضای Z (نرم و بعد Z) مستقل است موجود است که

$$\| \Psi^{-1}(L) \|_\pi \geq c^{-1} m.$$

اثبات. فرض کنید $y_1, \ldots, y_k$ پایه‌ای برای Y و $z_1, \ldots, z_m$ پایه‌ای برای Z باشد. قرار دهید $T(y_i) = y'_i$. عملگرهای خطی $S_{ij}: Y \to Z$ و $S'_{ji}: Z \to Y'$ را با

$$S'_{ji}(z_j) = y'_i, S'_{ji}(z_p) = 0 \ \ (p \neq j), \qquad S_{ij}(y_i) = z_j, S_{ij}(y_q) = \ 0 \ \ (q \neq i)$$

تعریف کنید. قرار دهید $N = \Sigma_{i,j} S_{ij} \otimes S'_{ji}$. به‌سادگی دیده می‌شود که $N^{op} = L$ درنتیجه $\Psi^{-1}(L) = N$. برای عملگر خطی $U: Y \to Y'$، $f(U)$ را برابر اثر به‌هنجارشده ($k^{-1}trace$) ماتریس متناظر با U نسبت به پایه‌های $y_1, \ldots, y_k$ و $y'_1, \ldots, y'_k$ تعریف می‌کنیم. بنابراین f یک تابعک خطی کراندار و ناصفر روی $B(Y, Y')$ است. اگر نرم تابعکی f را c فرض کنیم، آنگاه به‌وضوح c از فضای Z مستقل است. تابعک دوخطی

$$g: B(Y,Z) \times B(Z,Y') \longrightarrow \mathbb{C}$$

را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(P,Q) = f(QP).$$

نرم g بعنوان یک تابعک دوخطی از c بزرگتر نیست. در واقع:

$$Sup_{\|P\|,\|Q\|=1}|f(QP)| \leq Sup_{\|P\|,\|Q\|=1} \| f \| \| Q \| \| P \| \leq c.$$

بنابراین اگر $\bar{g}: B(Y,Z) \otimes_\pi B(Z,Y') \longrightarrow \mathbb{C}$ تابعک خطی تعریف شده با

$$\bar{g}(P \otimes Q) = g(P,Q)$$

را نشان دهد، آنگاه از خواص ضرب تانسوری تصویری می‌دانیم که نرم $\bar{g}$ نیز بزرگتر از c نیست. پس داریم

$$|c^{-1}\bar{g}(N)| \leq \| N \|_\pi.$$

از طرف دیگر داریم

$$\bar{g}(N) = \bar{g}(\Sigma_{i,j} S_{ij} \otimes S'_{ji}) = \Sigma_{i,j} f(S'_{ji} S_{ij}) = \Sigma_{i,j} 1/k = m.$$

اثبات کامل است. ■

به گزاره زیر که بیانی از قضیه معروف کَدِک-اسنوبار (قضیه ۲۸.۶ از مرجع [۲]) است نیاز خواهیم داشت.

گزاره ۴. فرض کنید X فضای باناخ و Z زیرفضای برداری X از بعد متناهی m باشد. دراینصورت، به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ یک عملگر خطی تصویری $P_Z: X \longrightarrow Z$ چنان موجود است که $\| P_Z \| < \sqrt{m} + \varepsilon$.

گزاره ۵. همراه با مفروضات گزاره ۱، فرض کنید $M^{op} \neq 0$ یا به‌صورت هم‌ارز $\Gamma \neq 0$. دراین‌صورت X از بعد متناهی است.

اثبات. بردارهای ناصفر y', y در X موجودند که $\Gamma(y) = y'$. فرض کنید Y', Y به‌ترتیب زیرفضاهای یک بعدی تولید شده توسط y', y باشند. عملگر خطی $T: Y \longrightarrow Y'$ را برابر با تحدید Γ به Y تعریف کنید. فرض کنید Z زیرفضای برداری دلخواهی از بعد m در X باشد. فرض کنید $E_Y: Y \to X$ و $E_Z: Z \to X$ نگاشت‌های نشاننده باشند و $P_{Y'}: X \to Y'$ نگاشت تصویرگر پیوسته دل‌خواهی باشد. از گزاره ۴ می‌دانیم یک نگاشت تصویری پیوسته

$$P_Z: X \to Z$$

چنان موجود است که $\| P_Z \| < \sqrt{m} + 1$. قرار دهید:

$$N = (P_Z \otimes P_{Y'}) M (E_Y \otimes E_Z) \in B(Y,Z) \otimes_\pi B(Z,Y').$$

می‌توان بررسی کرد که $\| N \|_\pi \leq \| P_Z \| \| P_{Y'} \| \| M \|_\pi$ و $N^{op} = L$، درجایی‌که L با لم ۳ تعریف شده باشد. حال، از لم ۳ نتیجه می‌شود که

$$m(\sqrt{m}+1)^{-1} c^{-1} \| P_{Y'} \|^{-1} \leq \| M \|_\pi.$$

بنابراین بعد زیرفضای دلخواه Z از بالا کراندار است. بعبارت دیگر X از بعد متناهی است. ■

قضیه زیر، که نتیجه اصلی مقاله است، مستقیماً از گزاره ۵ نتیجه می‌شود.

قضیه ۶. فرض کنید فضای باناخ نامتناهی بعد X موجود باشد به‌گونه‌ای که $B(X)$ انقباض‌پذیر باشد. دراین‌صورت به‌ازای هر قطر M از $B(X)$ باید داشته باشیم $M^{op} = 0$.

References

1. N. Gronbaek, Various notions of amenability, a survey of problems, Proceedings of 13th International Conference on Banach Algebras in Blaubeuren, 1997, Walter de Gruyter, Berlin, (1998), 535-547.
2. M. Fabian, P. Habala, P. Hajek, V. Montesinos, and V. Zizler, Banach space theory: The basis for linear and nonlinear analysis, CMS Books in Mathematics, Springer, New York, 2011.
3. B. E. Johnson, Cohomology in Banach algebras, Memoirs of the American Mathematical Society, vol. **127**, 1972.
4. O. T. Mewomo, Various notions of amenability in Banach algebras, Expositiones Mathematicae **29**, (2011), 283-299.
5. V. Runde, Lectures on amenability, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2002.
6. V. Runde, Amenable Banach algebras, Springer Monographs in Mathematics, Science+Business Media, Berlin, 2020.
7. R. A. Ryan, Introduction to tensor products of Banach spaces, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, London, 2002.