



Kharazmi University

# Numerical Solution of an Inverse Problem for Fourth Order Parabolic Equation with Integral Boundary Condition Using Operational Matrices

Kamal Rashedi  

Department of Mathematics, University of Sciences and Technology of Mazandaran, Behshahr, Iran.

✉ E-mail: [k.rashedi@mazust.ac.ir](mailto:k.rashedi@mazust.ac.ir)

Article Info	ABSTRACT
<p><b>Article type:</b> Research Article</p> <p><b>Article history:</b> Received: 22 October 2022 Received in revised form: 6 June 2023 Accepted: 10 September 2023 Published online: 29 February 2024</p> <p><b>Keywords:</b> Inverse parabolic equation, Tikhonov regularization, Spectral method, Orthonormal Bernstein bases.</p>	<p><b>Introduction</b></p> <p>We ponder the following one-dimensional fourth-order parabolic equation</p> $u_t(x, t) + u_{xxxx}(x, t) = f(t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (1)$ <p>with the homogeneous boundary conditions</p> $u_x(0, t) = u_x(1, t) = u_{xxx}(0, t) = u_{xxx}(1, t) = 0, \quad t \in [0, T] \quad (2)$ <p>and extra measurements</p> $\int_0^T u(x, t) dt = g(x), \quad x \in [0, 1], \quad (3)$ $u(x^*, t) = h(t), \quad t \in [0, T], \quad (4)$ <p>to approximate the unknown functions <math>(f(t), u(x, t))</math>. The system of equations (1) – (4), appears in the study of a wide range of problems derived from physics, chemistry, biology and engineering. The parabolic equations of the fourth order are used to create a balance between removing noise and preserving the edge and preventing blocky effects in image processing. We can also point to famous equations such as Cahn-Hilliard and Kuramoto-Sivashinsky equations which are very important in describing instabilities in dynamical systems derived from physical and chemical phenomena. Investigations regarding the existence and uniqueness of the solution, regularity and presentation of strong and weak solutions for some parabolic equations of the fourth order have been done in several articles. Moreover, various numerical methods such as finite difference method, finite element method and spline approximation method have been used to solve these equations.</p> <p><b>Material and Methods</b></p> <p>The sufficient conditions of the existence and uniqueness of the solution for the considered inverse problem are established. A spectral technique based on the application of operational matrices of differentiation is applied for recovering the unknown functions. Numerical simulations are included to show the efficiency of the proposed method.</p> <p><b>Results and discussion</b></p> <p>By using the Fourier method and applying the assumptions of the problem, we prove the existence and uniqueness of the classical solution for the inverse problem expressed in equations (1) – (4). Then, we present an accurate and stable numerical algorithm to determine the unknown functions of the problem in the presence of accurate and contaminated input boundary data. It can be seen that by employing the proposed</p>

---

method, satisfactory results are obtained such that in the presence of the exact initial and boundary data, the unknown functions are excellently retrieved and regarding the noisy boundary data the obtained approximations deviate from the analytical solution almost proportional to the amount of introduced noise.

### Conclusion

From this study, following concluding remarks were drawn.

- The solvability of the inverse problem is proved.
- An efficient numerical method is applied for approximating the unknown functions. In fact, the main problem is reduced to a linear system of algebraic equations which can be easily solved to get satisfactory findings. The technique can be developed for solving a broad class of initial/boundary value problems.
- We tested the numerical stability of the solution when dealing with noisy boundary conditions. It is seen that by applying the Tikhonov regularization method, robust and reliable solutions are achieved.

---

**How to cite:** Rashedi. K.. (2023). Numerical Solution of an Inverse Problem for Fourth Order Parabolic Equation with Integral Boundary Condition Using Operational Matrices. *Mathematical Researches*. 9 (4). 225 – 239.



© The Author(s).

Publisher: Kharazmi University

---

## حل عددی یک مسئله معکوس برای معادله سهموی مرتبه چهارم همراه با شرط مرزی انتگرالی با استفاده از ماتریس‌های عملیاتی

کمال راشدی<sup>1</sup> ✉

۱. گروه ریاضی، دانشگاه علم و فناوری مازندران، بهشهر، ایران. رایانامه: [k.rashedi@mazust.ac.ir](mailto:k.rashedi@mazust.ac.ir)

اطلاعات مقاله	چکیده
نوع مقاله: مقاله پژوهشی	در این مقاله، مسئله معکوس خطی جهت تقریب عبارت سمت راست یک معادله سهموی مرتبه چهارم مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در این مسئله فرض شده‌است که شرایط مرزی همگن به همراه یک شرط انتگرالی روی حوزه زمان و یک شرط موضعی در نقطه‌ای از حوزه مکان معلوم باشند. در گام نخست نشان می‌دهیم که این مسئله دارای جواب یکتا می‌باشد. سپس مسئله اولیه را با استفاده از تبدیلاتی مناسب به یک مسئله جدید تبدیل می‌کنیم که در آن تابع مجهول وابسته به زمان به شرایط مرزی منتقل شده و سپس تقریبی طیفی بر اساس روش ریتز برای بازیابی توابع مجهول ارائه می‌شود. از گسسته‌سازی مسئله با استفاده از دریافت عددی پیشنهاد شده، یک دستگاه جبری از معادلات خطی حاصل می‌شود که برای حل آن از روش منظم‌سازی تیخونوف استفاده شده‌است. نتایج شبیه‌سازی‌های عددی موید دقت قابل قبول و پایداری جواب تقریبی می‌باشند.
تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۷/۳۰ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۴/۵ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۶/۱۹ تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۱۲/۱۰	
<b>واژه‌های کلیدی:</b> مساله معکوس سهموی، منظم‌سازی تیخونوف، روش طیفی، پایه‌های یکا متعامد برنشتاین.	
استناد: نام راشدی، کمال؛ (۱۴۰۲). حل عددی یک مسئله معکوس برای معادله سهموی مرتبه چهارم همراه با شرط مرزی انتگرالی با استفاده از ماتریس‌های عملیاتی، پژوهش‌های ریاضی، ۹ (۴)، ۲۲۵ – ۲۳۹.	
ناشر: دانشگاه خوارزمی	© نویسندگان.



## ۱- مقدمه

در این مقاله، مسئله معکوس<sup>۱</sup> زیر جهت بازیابی توابع مجهول  $(u(x, t), f(t))$  در معادله سهموی مرتبه چهارم<sup>۲</sup> در نظر گرفته شده است:

$$u_t(x, t) + u_{xxxx}(x, t) = f(t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (1)$$

به همراه شرایط مرزی همگن

$$u_x(0, t) = u_x(1, t) = u_{xxx}(0, t) = u_{xxx}(1, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (2)$$

و شرایط انتگرالی

$$\int_0^T u(x, t) dt = g(x), \quad x \in [0, 1], \quad (3)$$

و یک شرط موضعی در نقطه‌ای از حوزه مکان به صورت

$$u(x^*, t) = h(t), \quad t \in [0, T], \quad (4)$$

که در آن  $Q_T = \{(x, t) | 0 < x < 1; 0 < t \leq T\}$  دامنه‌ای کراندار از  $\mathbf{R}^2$  و  $x^*$  یک نقطه داخلی از بازه  $[0, 1]$  می‌باشد. همچنین فرض می‌کنیم که شرایط سازگاری<sup>۳</sup> به صورت زیر برای داده‌های اولیه و مرزی مسئله برقرار باشند:

$$g'(0) = g'(1) = g'''(0) = g'''(1) = 0, \quad \int_0^T h(t) dt = g(x^*), \quad (5)$$

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه چهارم نسبت به متغیر مکانی در مطالعه طیف وسیعی از مسایل برگرفته شده از فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی و مهندسی پدیدار می‌شوند [1-3]. به‌طور خاص معادله سهموی مرتبه چهارم جهت ایجاد تعادل بین حذف نویز<sup>۴</sup> و حفظ لبه<sup>۵</sup> و جلوگیری از اثرات بلوکی<sup>۶</sup> در پردازش تصویر<sup>۷</sup> استفاده می‌شود. همچنین می‌توانیم به معادلات مشهوری مانند کان-هیلیارد و کروماتو-سیوا شینسکی<sup>۸</sup> اشاره کنیم که در طبقه‌بندی معادلات سهموی مرتبه چهارم قرار دارند و از اهمیت به‌سزایی در توصیف ناپایداری در سیستم‌های دینامیکی برگرفته از پدیده‌های فیزیکی و شیمیایی برخوردارند [4-6]. مطالعات علمی در زمینه وجود و یکتایی جواب، منظم بودن و ارائه جواب‌های قوی و ضعیف برای معادلات سهموی مرتبه چهارم در چندین مقاله انجام شده است [7-8]. همچنین روش‌های عددی گوناگونی نظیر روش تفاضلات متناهی، روش عناصر متناهی و روش تقریب اسپلاین جهت حل این

<sup>۱</sup> Inverse problem

<sup>۲</sup> Fourth-order parabolic equation

<sup>۳</sup> Consistency condition

<sup>۴</sup> Noise removal

<sup>۵</sup> Edge preservation

<sup>۶</sup> Blocky effects

<sup>۷</sup> Image processing

معادلات به کار برده شده است [9-11].

در این مقاله، با استفاده از روش فوریه و به کارگیری مفروضات مسئله، وجود و یکتایی جواب کلاسیک<sup>۸</sup> برای مسئله معکوس بیان شده در معادلات (1) - (4) را اثبات می‌کنیم. سپس، الگوریتم عددی دقیق و پایداری را برای بازیابی توابع مجهول مسئله ارائه می‌دهیم. در پایان نتایج شبیه سازی‌های عددی حاصل از پیاده‌سازی روش ارائه شده در حل مثال‌های عددی ارائه می‌شود.

## ۲- یکتایی جواب

در این بخش، روشی مبتنی بر به کارگیری سری فوریه<sup>۹</sup> جهت اثبات یکتایی<sup>۱۰</sup> جواب برای مسئله معکوس داده شده ارائه می‌شود.

**قضیه ۲،۱:** با این فرض که توابع موجود در معادلات (1) - (4) به اندازه کافی در دامنه  $Q_T$  مشتق پذیر-پیوسته بوده و شرایط سازگار (۵) برای داده‌های ورودی مسئله برقرار باشد. آنگاه مسئله معکوس بیان شده در دستگاه معادلات (1) - (4) دارای جواب یکتا در  $C^{4,1}(Q_T)$  است.

**برهان:** در گام نخست با معرفی تبدیل زیر:

$$v(x, t) = u(x, t) - F(t), \quad F(t) = \int_0^t f(r) dr, \quad (6)$$

و استفاده از آن در معادلات (1) - (4)، به دستگامی هم‌ارز از معادلات دیفرانسیل-انتگرال به صورت زیر می‌رسیم:

$$v_t(x, t) + v_{xxxx}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in Q_T, \quad (7)$$

$$\int_0^T v(x, t) dt = g(x) - \int_0^T F(r) dr, \quad x \in [0, 1], \quad (8)$$

$$v_x(0, t) = v_x(1, t) = v_{xxx}(0, t) = v_{xxx}(1, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (9)$$

$$v(x^*, t) = h(t) - F(t), \quad t \in [0, T]. \quad (10)$$

فرض کنید دستگاه معادلات (7) - (10) دارای دو دسته جواب به شکل  $(v_2(x, t), f_2(t)), (v_1(x, t), f_1(t))$  باشد که در آن

<sup>۸</sup> Classical solution

<sup>۹</sup> Fourier series

<sup>۱۰</sup> Uniqueness

$$\forall (x, t) \in Q_T, \quad f_1(t) \neq f_2(t), \quad v_1(x, t) \neq v_2(x, t), \quad (11)$$

اکنون با تعریف

$$z(x, t) = v_2(x, t) - v_1(x, t), \quad \nabla F(t) = \int_0^t \int_0^y f_2(r) - f_1(r) dr dy,$$

و استفاده از آنها در معادلات (7) - (10) داریم:

$$z_t(x, t) + z_{xxxx}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in Q_T, \quad (12)$$

$$\int_0^T z(x, t) dt = -\nabla F(T), \quad x \in [0, 1], \quad (13)$$

$$z_x(0, t) = z_x(1, t) = z_{xxx}(0, t) = z_{xxx}(1, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (14)$$

$$z(x^*, t) = -\frac{d}{dt} \nabla F(t), \quad t \in [0, T]. \quad (15)$$

جواب فوریه برای دستگاه معادلات (12) - (15) را به صورت زیر پیشنهاد می‌کنیم:

$$z(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(t) \cos n\pi x, \quad (16)$$

که از جای‌گذاری تقریب (16) در معادله (12) داریم:

$$g_n(t) + (n\pi)^4 g_n(t) = 0 \Rightarrow g_n(t) = \mu_n e^{-(n\pi)^4 t}, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (17)$$

هم‌چنین از معادلات (13)، (16) و (17) می‌توان استدلال کرد که:

$$\begin{aligned} \mu_0 T - \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \left\{ \frac{e^{-(n\pi)^4 T} - 1}{(n\pi)^4} \right\} \cos n\pi x &= -\nabla F(T) = \text{constant} \\ \Rightarrow \mu_0 &= \frac{-1}{T} \nabla F(T), \quad \mu_n = 0, n \geq 1. \end{aligned} \quad (18)$$

اکنون با استفاده از معادلات (15)، (16) و (18) و مشتق‌گیری نسبت به متغیر  $t$  به این نتیجه می‌رسیم که:

$$\frac{-1}{T} \nabla F(T) = z(x^*, t) = \frac{-d}{dt} \nabla F(t) \Rightarrow f_2(t) - f_1(t) = 0 \Rightarrow f_2(t) = f_1(t), \quad (19)$$

و نهایتاً از (19)، (18) و (16) می‌توان استنباط کرد که:

$$\mu_0 = 0 \xrightarrow{\mu_n=0, n \geq 1} z(x, t) = 0 \Rightarrow v_2(x, t) = v_1(x, t).$$

## ۳- الگوریتم محاسباتی

نخست، نحوه بدست آوردن پایه‌های یکامتعامد برنشتاین<sup>۱۱</sup> با استفاده از فرآیند متعامدسازی گرام-اشمیت<sup>۱۲</sup> را ارائه می‌دهیم [12-13]. چندجمله‌های برنشتاین<sup>۱۳</sup> از درجه  $m$  و تعریف شده بر بازه  $[0, q]$  به صورت زیر ارائه می‌شوند [14].

$$B_{i,m}(s) = \binom{m}{i} \frac{s^i (q-s)^{m-i}}{q^m}, \quad i = 0, 1, \dots, m. \quad (20)$$

حال با استفاده از فرمول گرام-اشمیت، پایه‌های متعامد برنشتاین به ازای  $1 \leq n \leq m$  به شکل زیر تولید می‌شوند:

$$\varphi_0^*(s) = B_{0,m}(s), \quad \varphi_n^*(s) = B_{n,m}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\int_0^q B_{n,m}(s) \varphi_k^*(s) ds}{\int_0^q (\varphi_k^*(s))^2 ds} \varphi_k^*(s),$$

در نهایت پایه‌های یکامتعامد برنشتاین بر بازه  $[0, q]$  عبارتند از:

$$\varphi_m(s) = \frac{\varphi_m^*(s)}{\sqrt{\int_0^q (\varphi_k^*(s))^2 ds}} \quad (21)$$

قابل ذکر است که مجموعه  $\{\varphi_m(s)\}_{m=0}^{\infty}$  در فضای  $L^2[0, q]$  کامل هستند و در خاصیت دلتای کرونکر<sup>۱۴</sup> به شکل زیر صدق می‌کنند:

$$\int_0^q \varphi_m(s) \varphi_n(s) ds = \begin{cases} 1 & \text{if } m = n, \\ 0 & \text{if } m \neq n. \end{cases} \quad (22)$$

همچنین ماتریس عملیاتی مشتق<sup>۱۵</sup>، متناظر با پایه‌های یکامتعامد  $\varphi_m(s)$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. فرض کنید  $H^{Tr}(s) = [\varphi_0(s), \dots, \varphi_M(s)]$  بردار شامل  $M$  پایه یکامتعامد تعریف شده بر بازه  $[0, q]$  باشد. در این صورت

$$\frac{d}{ds} H(s) := D_M H(s), \quad (23)$$

که در آن  $D_M$  ماتریس عملیاتی مشتق [15-16] از مرتبه  $(M+1) \times (M+1)$  می‌باشد. اگر درایه‌های این ماتریس را با  $H_{ij}$  تعریف کنیم آنگاه با انجام محاسباتی مختصر خواهیم داشت:

$$H_{ij} = \int_0^q \Delta_i(s) \varphi_j(s) ds, \quad \Delta_i(s) = \frac{d}{ds} \varphi_i(s), \quad i, j = 0, 1, \dots, M. \quad (24)$$

<sup>۱۱</sup> Orthonormal Bernstein Bases

<sup>۱۲</sup> Gram-Schmidt procedure

<sup>۱۳</sup> Bernstein polynomials

<sup>۱۴</sup> Kronecker delta property

<sup>۱۵</sup> Operational matrix of differentiation

اکنون با توجه به اینکه مسائل داده شده در معادلات (1) - (4) و (7) - (10) معادل هستند، کافی است حل تقریبی برای توابع مجهول  $v(x, t)$  و  $f(t)$  موجود در دستگاه (7) - (10) ارائه گردد. در این راستا، تقریب ریتز<sup>۱۶</sup> به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$v_{n,n'}(x, t) = x^4(x-1)^4 \phi^{Tr}(x) C \psi(t), \quad f_{n'}(t) = d^{Tr} \psi(t), \quad (25)$$

که در آن  $\psi(t)$  بردارهایی متشکل از پایه‌های یکامتعامل به ترتیب تعریف شده بر بازه‌های  $[0, 1]$  و  $[0, T]$  هستند و به شکل زیر نمایش داده می‌شوند:

$$\phi^{Tr}(x) = [\varphi_0(x), \dots, \varphi_n(x)], \quad \psi^{Tr}(t) = [\psi_0(t), \dots, \psi_{n'}(t)]. \quad (26)$$

همچنین  $d^{Tr}$  و  $C$  بردار و ماتریس شامل مجهولات، به صورت زیر معرفی می‌شوند:

$$d^{Tr} = [d_0, \dots, d_{n'}]. \quad C = \begin{bmatrix} c_{00} & \cdots & c_{0n'} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n0} & \cdots & c_{nn'} \end{bmatrix}, \quad (27)$$

واضح است که اگر شرایط سازگاری<sup>۱۷</sup> (5) برقرار باشد آنگاه شرایط مرزی (9) توسط تقریب  $v_{n,n'}(x, t)$  به صورت خودکار برآورده می‌شوند. در ادامه کافی است معادلات (7) - (8) و (10) به کمک روش هم مکانی<sup>۱۸</sup> به صورت تقریبی برآورده شوند. بدین منظور ابتدا با چهار بار مشتق‌گیری نسبت به  $x$  از رابطه (8) و استفاده از معادله (7) داریم:

$$v(x, 0) - v(x, T) = g^{(4)}(x), \quad x \in [0, 1]. \quad (28)$$

ضمناً توابع باقیمانده

$$R_1(x, t, v(x, t)) := v_t(x, t) + v_{xxxx}(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (29)$$

$$R_2(t) := v(x^*, t) - h(t) + F(t), \quad t \in [0, T], \quad (30)$$

$$R_3(x) := v(x, 0) - v(x, T) - g^{(4)}(x), \quad x \in [0, 1], \quad (31)$$

به همراه نقاط هم‌مکانی  $t_j \in [0, T], x_i \in [0, 1]$  را به صورت زیر معرفی کرده

$$x_i := \frac{i}{n+2}, \quad t_j := \frac{jT}{n'+1}, \quad i = 1, \dots, n+1, j = 1, \dots, n', \quad (32)$$

و سپس تقریب‌های زیر را برای  $v_t(x, t)$  و  $v_{xxxx}(x, t)$  ارائه می‌دهیم:

$$v_t(x, t) \approx x^4(x-1)^4 \phi^{Tr}(x) C D_{n'} \psi(t). \quad (33)$$

<sup>۱۶</sup> Ritz approximation

<sup>۱۷</sup> Consistency condition

<sup>۱۸</sup> Collocation method



$$\begin{aligned}
v_{xxxx}(x, t) \approx & \{x^4(x-1)^4 \phi^{Tr}(x)(D_n^4)^{Tr} \\
& + (16x^4(x-1)^3 + 16x^3(x-1)^4) \phi^{Tr}(x)(D_n^3)^{Tr} \\
& + (72x^2(x-1)^4 + 192x^3(x-1)^3 \\
& + 72x^4(x-1)^2) \phi^{Tr}(x)(D_n^2)^{Tr} \\
& + (96x(x-1)^4 + 576x^2(x-1)^3 + 576x^3(x-1)^2 \\
& + 96x^4(x-1)) \phi^{Tr}(x) D_n^{Tr} + (24(x-1)^4 \\
& + 384x(x-1)^3 + 864(x-1)^2x^2 + 384x^3(x-1) \\
& + 24x^4) \phi^{Tr}(x)\} C\psi(t),
\end{aligned} \tag{۳۴}$$

پس از جای‌گذاری تقریب‌های (33) - (34)، در معادلات (29) و (31) و بکارگیری نقاط هم‌مکانی (32) در آنها به صورت زیر

$$R_1(x_i, t_j, v(x_i, t_j)) = 0, \quad R_3(x_i) = 0, \tag{۳۵}$$

به سیستم خطی از معادلات جبری<sup>۱۹</sup> زیر می‌رسیم

$$Ac = b, \tag{۳۶}$$

که در آن C بردار شامل مجهولات به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$c^{Tr} = [c_{00}, \dots, c_{0n'}, c_{10}, \dots, c_{1n'}, \dots, c_{n0}, \dots, c_{nn'}]. \tag{۳۷}$$

از حل دستگاه معادلات (37)، با استفاده از روش منظم‌سازی تیخونوف<sup>۲۰</sup>، بردار مجهول C به شکل زیر حاصل می‌گردد:

$$c = (A^{Tr}A + \gamma I)^{-1}A^{Tr}b, \quad \gamma > 0, \tag{۳۸}$$

که در آن  $\gamma$  پارامتر منظم‌سازی است که از معیار خم‌ال-شکل<sup>۲۱</sup> جهت دست‌یافتن به مقدار بهینه این پارامتر استفاده می‌کنیم [17-18]. بنابراین تابع  $v_{n,n'}(x, t)$  مشخص شده و در گام بعدی با استفاده از روش هم‌مکانی به صورت زیر

$$R_2(t_j) = 0 \Rightarrow v(x^*, t_j) - h(t_j) + F(t_j), \quad t_j \in [0, T], \tag{۳۹}$$

و حل آن، بردار

$$d^{Tr} = [d_0, \dots, d_{n'}],$$

به همراه تابع  $f_{n'}(t)$  مشخص می‌گردد. سپس باتوجه به روابط موجود در معادله (۶) داریم:

$$u_{n,n'}(x, t) = v_{n,n'}(x, t) + \int_0^t f_{n'}(r) dr, \tag{۴۰}$$

<sup>۱۹</sup> Linear system of algebraic equation

<sup>۲۰</sup> Tikhonov regularization method

<sup>۲۱</sup> L-curve criterion

## ۴- نتایج عددی

در این بخش عمل کرد روش ارائه شده در بخش ۳ را با به کارگیری آن در حل دو مثال عددی مورد بررسی قرار خواهیم داد. شبیه‌سازی‌های عددی در محیط نرم افزار متماتیکا انجام شده است. برای حل دستگاه معادلات جبری (38) از دستور *LinearSolve* استفاده شده است.

مثال ۱.۴. مسئله معکوس زیر را در نظر بگیرید:

$$u_t(x, t) + u_{xxxx}(x, t) = f(t), \quad (x, t) \in [0, 1] \times [0, T], \quad (41)$$

$$u_x(0, t) = u_x(1, t) = u_{xxx}(0, t) = u_{xxx}(1, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (42)$$

$$\int_0^T u(x, t) dt = -1 + e^{0.5T^2} + \frac{(1 - e^{-\pi^4 T}) \cos \pi x}{\pi^4}, \quad x \in [0, 1], \quad (43)$$

$$u(0.5, t) = te^{\frac{t^2}{2}}, \quad t \in [0, T]. \quad (44)$$

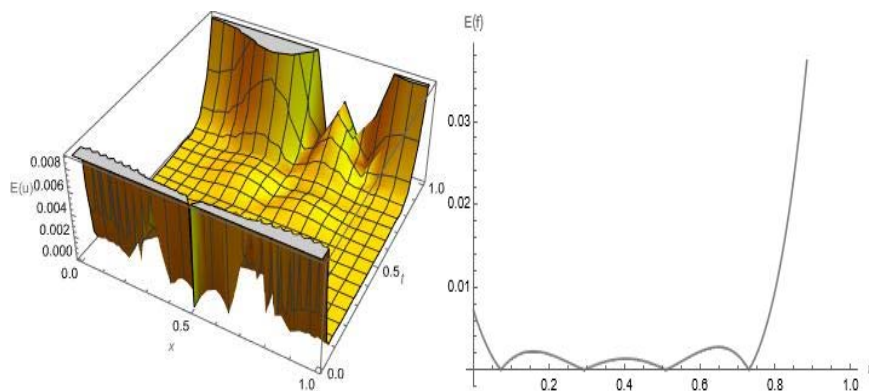
در این مسئله، هدف تقریب جواب‌های تحلیلی زیر می‌باشد:

$$u(x, t) = e^{-\pi^4 t} \cos \pi x + te^{\frac{t^2}{2}}, \quad f(t) = (1 + t^2)e^{\frac{t^2}{2}}. \quad (45)$$

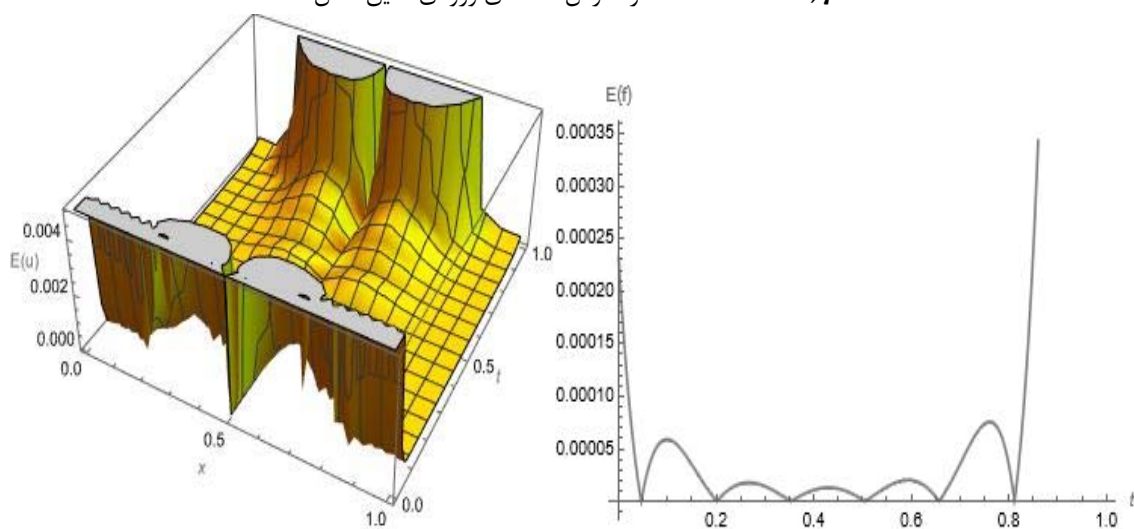
با به کارگیری راه‌حل پیشنهاد شده در بخش ۳ و استفاده از پارامترهای  $n = n' = 3, \gamma = 10^{-2}$  مسئله فوق را به ازای داده‌های مرزی دقیق (عاری از اغتشاش) و پارامتر  $T = 1$  حل کرده و نتایج مربوط به خطای مطلق را برای تقریب توابع  $u(x, t)$  و  $f(t)$  یعنی

$$E(u) = |u(x, t) - u_{n,n'}(x, t)|, \quad E(f) = |f(t) - f_{n'}(t)|, \quad (46)$$

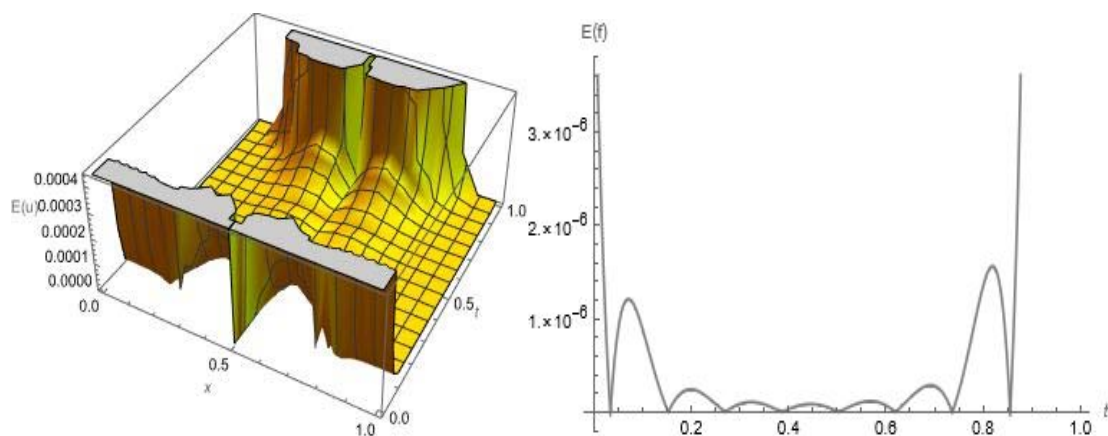
در شکل ۱ گزارش می‌کنیم. نتایج حاصل، حاکی از بدست آمدن دقت‌های مناسب برای توابع مجهول‌اند. به علاوه، در شکل‌های ۲ و ۳ نتایج عددی حاصل را با تاکید بر افزایش تعداد پایه‌های استفاده شده در تقریب‌ها مشاهده می‌کنیم که در آنها روند بهبود دقت عددی با افزایش پارامترهای  $n, n'$  بوضوح قابل مشاهده است.



شکل ۱: در این شکل نتایج مربوط به خطای مطلق متناظر با تقریب توابع  $f(t), u(x, t)$  با استفاده از پارامترهای  $n = n' = 3, \gamma = 10^{-2}$  در معرض داده‌های ورودی دقیق نشان داده شده‌اند.



شکل 2: در این شکل، نتایج مربوط به خطای مطلق متناظر با تقریب توابع  $f(t), u(x, t)$  با استفاده از پارامترهای  $n = n' = 5, \gamma = 10^{-2}$  در معرض داده‌های ورودی دقیق نشان شده‌اند.



شکل 3: در این شکل، نتایج مربوط به خطای مطلق متناظر با تقریب توابع  $f(t), u(x, t)$  با استفاده از پارامترهای  $n = n' = 7, \gamma = 10^{-1}$  در معرض داده‌های ورودی دقیق نشان داده شده‌اند.

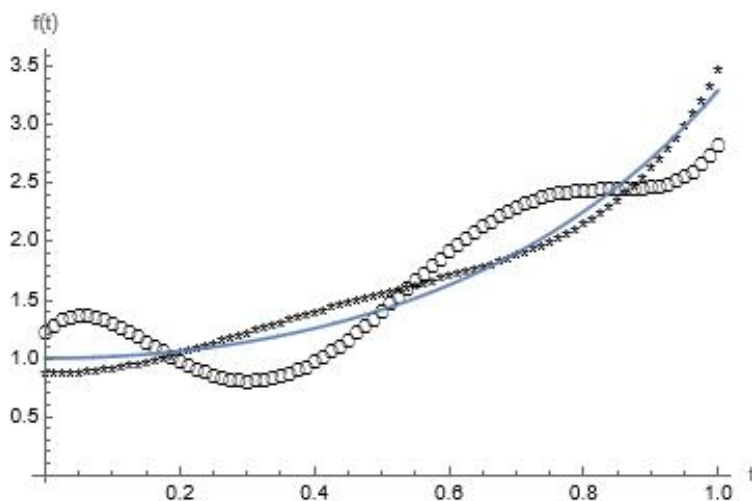
در گام بعدی عملکرد روش پیشنهاد شده در معرض داده‌های همراه با اغتشاش را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در این راستا، شرایط مرزی همراه با اختلال را به صورت زیر در نظر گرفته [19-20]

$$\int_0^1 u(x, t) dt = -1 + \sqrt{e} + \frac{(1 - e^{-\pi^4}) \cos \pi x}{\pi^4} + \eta \sin \frac{x}{\eta^2}, \quad x \in [0, 1], \quad (47)$$

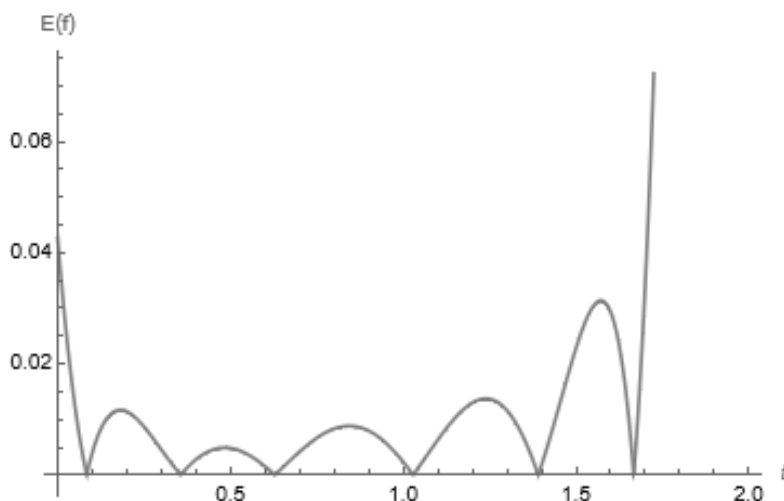
$$u\left(\frac{1}{2}, t\right) = te^{\frac{t^2}{2}} + \eta \sin \frac{t}{\eta^2}, \quad t \in [0, 1], \quad (48)$$

و مسئله را به ازای ضرایب  $\eta \in \{2 \times 10^{-2}, 4 \times 10^{-2}\}$  حل می‌کنیم. نتایج حاصل از این مطالعه در شکل ۴ گزارش شده است که نشان می‌دهد عملکرد روش در تعامل با این مقادیر نسبتاً کوچک قابل قبول است زیرا میزان خطا در داده‌های ورودی و خروجی تقریباً متناسب‌اند. قابل ذکر است که با افزایش ضریب  $\eta$  که معادل با افزایش مقدار خطا در داده‌های ورودی (47) - (48) است، مخصوصاً زمانی که مقدار ضریب  $\eta \geq 4 \times 10^{-2}$  است، جواب‌های تقریبی رفتار نوسانی پیدا می‌کنند.

در مرحله آخر، مسئله معکوس داده شده در معادلات (41) - (44) را مجدداً و این بار در بازه زمانی  $t \in [0, 2]$  به ازای داده‌های مرزی دقیق حل می‌کنیم. نتیجه حاصل از شبیه‌سازی عددی را که به ازای  $n = n' = 5, \gamma = 0.5$  به دست آمده است. در شکل ۵ نمایش می‌دهیم. بدیهی است که در مقایسه با شکل ۲، به دلیل تقریب تابع مجهول در دامنه بزرگتر، دقت عددی کاهش یافته است.



شکل 4: در این نمودار، نتایج مربوط به تقریب تابع  $f(t)$  حاصل شده با استفاده از پارامترهای  $n = n' = 5$  در معرض داده‌های ورودی همراه با اغتشاش گزارش شده است: منحنی آبی رنگ جواب دقیق مسئله است، منحنی مشخص شده با علامت \*\*\* جواب حاصل از محاسباتی است که در آنها پارامترهای  $\eta = 0.02, \gamma = 0.01$  استفاده شده است. همچنین منحنی مشخص شده با علامت ooo حاصل از شبیه‌سازی عددی به ازای  $\eta = 0.04, \gamma = 0.0001$  می‌باشد.



شکل 5: در این نمودار، نتایج مربوط به خطای مطلق متناظر با تقریب توابع  $f(t)$  با استفاده از پارامترهای  $n = n' = 5, \gamma = 0.5$ ، در معرض داده‌های ورودی دقیق نشان داده شده است.

مثال ۲.۴. مسئله معکوس زیر را در نظر بگیرید:

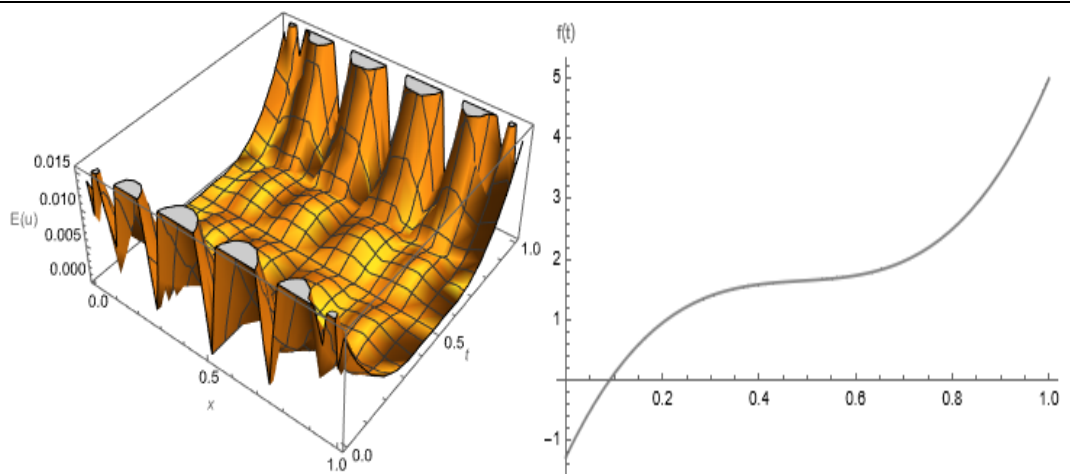
$$u_t(x, t) + u_{xxxx}(x, t) = f(t), \quad (x, t) \in [0, 1] \times [0, 1], \quad (49)$$

$$u_x(0, t) = u_x(1, t) = u_{xxx}(0, t) = u_{xxx}(1, t) = 0, \quad t \in [0, 1], \quad (50)$$

$$\int_0^1 u(x, t) dt = \cos(\pi x), \quad x \in [0, 1]. \quad (51)$$

$$u\left(\frac{1}{3}, t\right) = e^t + 1.5 - e. \quad t \in [0, 1]. \quad (52)$$

جواب دقیق این مسئله در دسترس نیست. با استفاده از روش ارائه شده در بخش ۳ و استفاده از پارامترهای  $n = n' = 3, \gamma = 0.1$ ، مسئله را حل می‌کنیم که نتیجه شبیه سازی عددی در شکل ۶ نمایش داده شده است.



شکل ۶: در این شکل، نتایج مربوط به تقریب تابع  $f(t)$  به همراه خطای مطلق متناظر با تقریب توابع  $u(x, t)$  با استفاده از پارامترهای  $n = n' = 3, \gamma = 0.1$ ، نمایش داده شده‌اند.

#### ۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، مسئله معکوس خطی از کلاس معادلات سهموی مرتبه چهارم جهت تقریب تابع وابسته به زمان مورد مطالعه قرار گرفته‌است. داده‌های قابل دسترس این مسئله شامل شرایط مرزی همگن به همراه یک شرط انتگرالی و یک شرط موضعی هستند که با استفاده از آنها نشان دادیم این مسئله دارای جواب یکتا است. سپس، مسئله اولیه را با استفاده از تبدیلاتی مناسب به یک مسئله جدید تبدیل کرده و در ادامه تقریبی طیفی بر اساس روش ریتز برای بازیابی توابع مجهول ارائه دادیم. مسئله گسسته‌سازی شده را به یک دستگاه معادلات خطی تقلیل داده و آن دستگاه را از روش منظم‌سازی تیخونوف حل کرده‌ایم. نتایج حاصل از شبیه‌سازی‌های عددی نشان می‌دهد این روش طیفی از لحاظ هزینه محاسباتی کم هزینه بوده و پیاده‌سازی روش بسیار آسان است. ضمناً جواب‌های حاصل دارای دقت مناسب‌اند و به دلیل استفاده از روش منظم‌سازی تیخونوف، جواب‌های تقریبی پایدار نسبت به اغتشاشات کوچک در شرایط مرزی حاصل شده‌اند.

#### References

- [1] K. Cao, D. Lenic and M. I. Ismailov, Determination of the time-dependent thermal grooving coefficient, *J. Appl. Math. Comput.* **65** (2021), 199-221.
- [2] W. W. Mullins, Theory of thermal grooving, *J. Appl. Phys.* **28** (1957), 333-339.
- [3] B. B. King, O. Stein and M. Winkler, A fourth-order parabolic equation modeling epitaxial thin film growth, *J. Math. Anal. Appl.* **28** (2003), 459-490.
- [4] J. W. Cahn and J. E. Hilliard, Free energy of a nonuniform system I interfacial free energy, *J. Chem. Phys.* **28** (1958), 258-267.
- [5] Y. Kuramoto and T. Tsuzuki, On the formation of dissipative structures in reaction-diffusion system, *Prog. Theor. Phys.* **54** (1975), 687-699.
- [6] G. I. Sivashinsky, Nonlinear analysis of hydrodynamic instability in laminar flames-I. Derivation of basic equations, *Acta. Astronaut.* **4** (1977), 1177-1206.

- [7] T. A. Kwembe, Existence and uniqueness of global solutions for the parabolic equation of the biharmonic type, *Nonlinear Anal. Theor.* **47** (2001), 1321-1332.
- [8] A. N. Sandjo, S. Moutari and Y. Gningue, Solutions of fourth-order parabolic equation modeling thin film growth, *J. Differ. Equations* **259** (2015), 7060-7283.
- [9] G. T. Kossioris and G. E. Zouraris, Fully discrete finite element approximations for a fourth-order linear stochastic parabolic equation with additive space-time white noise, *ESAIM. Math. Model. Num. Anal.* **44** (2010), 289-322.
- [10] R. K. Mohanty, S. Mckee and D. Kaur, A class of two-level implicit unconditionally stable methods for a fourth order parabolic equation, *Appl. Math. Comput.* **309** (2017), 272-280.
- [11] T. Aziz, K. Arshad and R. Jalil, Spline methods for the solution of fourth-order parabolic partial differential equations, *Appl. Math. Comput.* **167** (2005), 153-166.
- [12] K. Rashedi, A spectral method based on Bernstein orthonormal basis functions for solving an inverse Rosenau equation, *Comput. Appl. Math.* **214** (2022): <https://doi.org/10.1007/s40314-022-01908-0>.
- [13] S. A. yousefi, Finding a control parameter in a one dimensional parabolic inverse problem by using the Bernstein Galerkin Method, *Inverse Probl. Sci. En.* **17** (2009), 821-828.
- [14] S. A. Yousefi, M. Behroozifar and M. Dehghan, The operational matrices of Bernstein polynomials for solving the parabolic equation subject to specification of the mass, *J. Comput. Appl. Math.* **235** (2011), 5272–5283.
- [15] K. Rashedi, A numerical solution of an inverse diffusion problem based on operational matrices of orthonormal polynomials, *Math. Method. Appl. Sci.* **44** (2021), 12980-12997.
- [16] H. Dehestani, Y. Ordokhani and M. Razzaghi, Pseudo-operational matrix method for the solution of variable-order fractional partial integro-differentioal equations, *Eng. Comput. Germany*, **37** (2021), 1791–1806.
- [17] P. C. Hansen, Analysis of discrete ill-posed problems by means of the L-curve, *SIAM Rev.* **34** (1992), 561-580.
- [18] P. C. Hansen and D. P. O’leary, The use of the L-curve in the regularization of discrete ill-posed problems, *SIAM J. Sci. Comput.* **14** (1993), 1487-1503.
- [19] A. Kirsch, *An introduction to the mathematical theory of inverse problems*, Springer, 2011.
- [20] K. Rashedi, H. Adibi and M. Dehghan, Application of the Ritz-Galerkin method for recovering the spacewise-coefficient in the wave equation, *Comput. Math. Appl.* **65** (2013), 1990-2008.