Kharazmi University

Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://jemr.khu.ac.ir/

Grothendieck Banach Lattices and Classes of p-Convergent Operators

H. Ardakani[1] ✉, M. Salimi[2]

1. Corresponding Author, Department of Mathematics, Payame Noor University, P. O. Box 19395-3697, Tehran, Iran.
✉ E-mail: ardakani@pnu.ac.ir, halimeh_ardakani@yahoo.com
2. Department of Mathematics Education, Farhangian University, P.O. Box 14665-889, Tehran, Iran. E-mail: m.salimii@cfu.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 7 March 2023
Received in revised form: 3 September 2024
Accepted: 3 September 2024
Published online: 10 November 2024

Keywords:
L-set,
weaklyp-summable sequence,
p-convergent operator,
p-Schur property,
Banach lattice.

ABSTRACT

Introduction

A subset A of a Banach space X is called limited, if every w^*-null sequence (x_n^*) in X^* converges uniformly on A; that is, $\sup_{\substack{a\in A \\ x\in A}} |< x_n^*. a >| \to 0$. Every relatively compact set is limited and if every limited subset of X is relatively compact, then X has the Gelfand–Phillips (GP) property. For example, every separable Banach space and every Schur space have the GP property [13].
If $A \subseteq X^*$ and every weakly null (resp. weakly null limited) sequence (x_n) in X converges uniformly on A, we say that A is an $L-$set (resp. $L-$limited set). Each relatively weakly compact set in X^* is an $L-$limited set and if the converse also holds, X has the $L-$limited property [3, 21].
A bounded linear operator $T: X \to Y$ between two Banach spaces is limited completely continuous if it carries limited weakly null sequences in X to norm null ones in Y. The class of all limited completely continuous operators from X to Y is denoted by $Lcc(X.Y)$ [22].
A sequence (x_n) in a Banach space X is called weakly $p-$summable with $1 \leq p < \infty$, if for each $x^* \in X^*$, the sequence $(x^*(x_n)) \in l_p$ and a sequence $(x_n) \subseteq X$ is said to be weakly p-convergent to $x \in X$ if $(x_n - x) \in l_p^w(X)$, where $l_p^w(X)$denoted the space of all weakly p-summable sequences in X. The weakly ∞-convergent sequences are the weakly convergent sequences. A bounded subset $A \subseteq X$ is relatively weakly $p-$compact if every sequence in A has a weakly $p-$convergent subsequence. If limit of each weakly $p-$convergent subsequence is in A, then that A is called a weakly $p-$compact set. A bounded linear operator $T: X \to Y$ between two Banach spaces is $p-$convergent (resp. limited p-convergent) if it carries weakly $p-$summable (resp. limited weakly $p-$summable) sequences in X to norm null ones in Y [7, 26].
Recently the concepts of p-Schur and limited $p-$Schur properties in Banach spaces are introduced. In fact, a Banach space X has the $p-$Schur (resp. limited $p-$Schur) property if all weakly $p-$compact (resp. limited weakly $p-$compact) subsets of X are relatively compact, or equivalently every sequence $(x_n) \in l_p^w(X)$ (resp. limited sequence $(x_n) \in l_p^w(X)$ is norm null [26, 8].

The aim of this paper is to study the class of almost $L-$limited sets of order p in dual Banach lattices and disjoint limited p-convergent operators. Also, we characterize Banach lattices in which two classes of almost $L-$limited sets of order p and $L-$limited sets of order p in their dual coincide. In particular, a positive answer to an open question posed in [21] is given. In fact, we show that although $L-$limited subsets of E^* strictly contain w^*-sequentially compact sets, but w^*-sequentially compact subsets are relatively weakly compact if and only if $L-$limited subsets are relatively weakly compact. Moreover, some results of the disjoint limited $p-$Schur property as a generalization of the limited $p-$Schur property are investigated and some important consequences about this property are established. In this article we assume that $1 \leq p < \infty$, unless otherwise stated.

We recall some definitions and notations from Banach lattice theory. The norm $\|.\|$ of a Banach lattice E is order continuous if for each generalized net (x_α) such that $x_\alpha \downarrow 0$ in E, (xα) converges to 0 for the norm $\|.\|$, where the notation $x_\alpha \downarrow 0$ means that the net (x_α) is decreasing, its infimum exists and $\inf_\alpha(x_\alpha) = 0$. A subset A of E is called solid if $|x| \leq |y|$ for some y $\in A$ implies that x $\in$ A and the solid hull of A is the set $Sol(A) = \{y \in E: |y| \leq |x| \text{, for some } x \in A\}$.

Throughout this article, X denotes a Banach space, X^* refers to the dual of X, E denotes a Banach lattice, $E^+ = \{x \in E : x \geq 0\}$ is the positive cone of E and B_E is the closed unit ball of E. A subset of a Banach lattice is called order bounded if it is contained in an order interval. For terminologies concerning Banach lattice theory we refer the reader to [1, 20].

Material and Methods

In this paper the class of almost $L-$limited sets of order p in dual Banach lattices and disjoint limited $p-$convergent operators are studied. Also, Banach lattices in which two classes of almost $L-$limited sets of order p and $L-$limited sets of order p in their dual coincide, are characterized. In particular, a positive answer to an open question posed in [21] is given. Moreover, some results of the disjoint limited $p-$Schur property as a generalization of the limited $p-$Schur property are investigated and some important consequences about this property are obtained.

Results and discussion

The followings are the main results of our paper.

Theorem. For a Banach lattice E, the following are equivalent:
(a) E is a Grothendieck space,
(b) E has the $L-$ limited property,
(c) E has the $pL-$ limited property.

Theorem. Let E be a $\sigma-$Dedekind complete Banach lattice. Then the following are equivalent:
(a) E has the disjoint limited $p-$ Schur property,
(b) for each Banach space Y, $L_{pc}^d(E.Y) = L(E.Y)$,
(c) $L_{pc}^d(E.l_\infty) = L(E.l_\infty)$.

Theorem. Let E be a $\sigma-$Dedekind complete Banach lattice. Then E has the disjoint limited $p-$ Schur property if and only if every disjoint limited positive sequence $(x_n) \in l_p^w(E)$ is norm null.

Theorem. Let E be a $\sigma-$Dedekind complete Banach lattice with the type q

Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://jemr.khu.ac.ir/

(with $1 < q \leq 2. p \geq q'$). Then the following are equivalent:
(a) E has the $p - wDP^*$ property,
(b) $C_{lp}^d(E.Y) = C_p^d(E.Y)$, for each Banach space Y ,
(c) $C_{lp}^d(E.c_0) = C_p^d(E.c_0)$. 0

Theorem. For a Banach lattice E, the following are equivalent:
(a) each almost pL −limited set in $E^*$is a pL −limited set,
(b) for each Banach space Y , $L_{pc}^d(E.Y) = L_{pc}(E.Y)$,
(c) L_{pc}^d (E, l_∞) = L_{pc} (E, l_∞).

Conclusion
The following conclusions are obtained from this research.
Banach lattices in which almost pL −limited sets and pL −limited sets are relatively weakly compact are studied. As an application, we give a connection between the $L -$ limited property and Grothendieck Banach lattices. Also, some results of the disjoint limited $p -$ Schur property as a generalization of the limited $p -$ Schur property are investigated and some important consequences about this property are established.

How to cite: Ardakani, H., & Salimi, M. (2024). Grothendieck Banach Lattices and Classes of p-Convergent Operators. *Mathematical Researches*, **10** (3), 1 – 17.

 Publisher: Kharazmi University

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

مشبکه‌های باناخ گروتندیک و کلاس‌هایی از عملگرهای p−همگرا

حلیمه اردکانی[1]✉، منیژه سلیمی[2]

۱. نویسنده مسئول ، دانشکده ریاضی دانشگاه پیام نور ، تهران، ایران. رایانامه: halimeh_ardakani@yahoo.com
۲. ، گروه آموزش ریاضی دانشگاه فرهنگیان، تهران، ایران. رایانامه: m.salimii@cfu.ac.ir,

اطلاعات مقاله	چکیده
نوع مقاله: مقاله پژوهشی **تاریخ دریافت:** ۱۴۰۱/۱۲/۱۶ **تاریخ بازنگری:** ۱۴۰۳/۶/۱۳ **تاریخ پذیرش:** ۱۴۰۳/۶/۱۳ **تاریخ انتشار:** ۱۴۰۳/۸/۲۰	مفهوم مجموعه‌های L− محدود از مرتبه‌ی p $(1 \leq p \leq \infty)$ در دوگان فضاهای باناخ و همچنین عملگرهای p−همگرا قبلا معرفی شده‌اند. در این مقاله، نتایجی در مورد مجموعه های تقریباً L− محدود از مرتبه‌ی p در دوگان مشبکه های باناخ و عملگرهای p− همگرای مجزا به دست می آید. به ویژه، نتیجه میگیریم که مشبکه های باناخ با این ویژگی که هر مجموعه‌ی L− محدود (یا L− محدود از مرتبه‌یp) در دوگان آنها یک مجموعه‌ی فشرده ضعیف نسبی باشد، دقیقاً همان فضاهای گروتندیک هستند. به علاوه، ثابت می شود که یک مشبکه باناخ M از فضاهای عملگری خاصیتp− شور محدود مجزا دارد اگر و تنها اگر همه عملگرهای محاسبه‌ای روی M مجزای p− همگرا باشند.

واژه‌های کلیدی:
L−مجموعه،
دنباله‌ی p −جمعپذیر،
عملگر p −همگرا،
خاصیت p −شور،
مشبکه‌ی باناخ

استناد: اردکانی، حلیمه؛ سلیمی، منیژه. (۱۴۰۳). مشبکه‌های باناخ گروتندیک و کلاس‌هایی از عملگرهای p−همگرا. *پژوهش‌های ریاضی*، **۱۰** (۳)، ۱ − ۱۷.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

۱.مقدمه

یک زیر مجموعه‌ی A ازیک فضای باناخ X را محدود گوییم هر گاه هر دنباله‌ی پوچ ضعیف ستاره در X^* روی A به طور یکنواخت همگرا به صفر باشد، یعنی $sup_{a\in A}|<x_n^*.a>| \to 0$. هر مجموعه‌ی فشرده‌ی نسبی یک مجموعه‌ی محدود است و چنانچه برعکس آن نیز درست باشد، فضای باناخ X را فضایی با خاصیت گلفاند- فیلیپس (GP) گوییم. برای مثال، فضاهای جدایی پذیر و هر فضای با خاصیت شور خاصیت GP دارند [13].

اگر $A \subseteq X^*$ و هر دنباله‌ی پوچ ضعیف (پوچ ضعیف و محدود) (x_n) در X روی A به طور یکنواخت همگرا به صفر باشد، آنگاه A را یک $L-$ مجموعه ($L-$ مجموعه‌ی محدود) می نامیم. هر مجموعه فشرده‌ی ضعیف نسبی در X^* یک مجموعه‌ی $L-$ محدود است و اگر برعکس آن نیز درست باشد، فضای X را دارای خاصیت $L-$ محدود گوییم [3,21].

عملگر کران دار $T: X \to Y$ بین دو فضای باناخ را کاملاً پیوسته‌ی محدود (lcc) گوییم هرگاه هر دنباله‌ی محدود پوچ ضعیف در X توسط T به یک دنباله نرم پوچ تصویر شود. کلاس همه‌ی عملگرهای lcc از X به Y را به $Lcc(X.Y)$ را نمایش می دهیم [22]. دنبالهی (x_n) در فضای باناخ X را $p-$ جمع پذیر ضعیف گوئیم هرگاه برای هر $x^* \in X^*$ ، $(x^*(x_n)) \in l_p$ و دنباله‌ی (x_n) در X را $p-$ را همگرای ضعیف به $x \in X$ گوییم، هرگاه $(x_n - x) \in l_p^w(X)$ که $l_p^w(X)$ فضای تمام دنباله های $p-$ جمع پذیر ضعیف در X است. مجموعه‌ی کران دار $A \subseteq X$ را $p-$ فشرده‌ی ضعیف نسبی گوییم هرگاه هر دنباله در A یک زیر دنباله‌ی $p-$ همگرای ضعیف داشته باشد. اگر حد هر زیر دنباله‌ی $p-$ همگرای ضعیف در A قرار داشته باشد، آن گاه A را یک مجموعه‌ی $p-$ فشرده‌ی ضعیف گوییم. عملگر کران دار $T: X \to Y$ را $p-$ همگرا ($p-$ همگرای محدود) گوییم، اگر T هر دنباله‌ی $p-$ جمع پذیر ضعیف ($p-$ جمع پذیر ضعیف محدود) در X را به یک دنباله‌ی نرم پوچ در Y بنگارد [7,26] .

اخیراً مفاهیم $p-$ شور و $p-$ شور محدود در فضاهای باناخ معرفی شده‌اند. در واقع، یک فضای باناخ X خاصیت $p-$ شور ($p-$ شور محدود) دارد اگر هر مجموعه‌ی$p-$ فشرده‌ی ضعیف ($p-$ فشرده‌ی ضعیف محدود) در X یک مجموعه‌ی $p-$ فشرده‌ی نسبی باشد، یا به طور معادل هر دنباله‌ی $(x_n) \in l_p^w(X)$ (هر دنباله‌ی محدود$(x_n) \in l_p^w(X)$) نرم پوچ باشد. همچنین مشبکه‌ی باناخ E خاصیت p– شور مثبت دارد هرگاه هر دنباله‌ی مثبت $(x_n) \in l_p^w(E)$ نرم پوچ باشد [8,26].

هدف اصلی این مقاله، مطالعه‌ی کلاس مجموعه‌های تقریباً $L-$ محدود از مرتبه‌ی $p-$ در دوگان مشبکه‌های باناخ و عملگرهای$p-$ همگرای محدود مجزا می باشد. همچنین مشبکه های باناخی که در دوگان آنها دو کلاس مجموعه های $L-$ محدود از مرتبه‌ی p و تقریباً $L-$ محدود از مرتبه‌ی p یکی هستند را معادل سازی می کنیم. به ویژه پاسخ مثبتی به سوال مطرح شده در منبع [21] داده می شود. در حقیقت، نشان می دهیم اگرچه مجموعه های $L-$ محدود در E^* اکیدا شامل مجموعه های فشرده‌ی ضعیف ستاره‌ی دنباله ای هستند ولی مجموعه های فشرده‌ی ضعیف ستاره‌ی دنباله ای در E^* فشرده‌ی ضعیف نسبی هستند اگر و تنها اگر مجموعه های $L-$ محدود در E^* فشرده‌ی ضعیف نسبی باشند. به علاوه برخی نتایج در ارتباط با خاصیت $p-$ شور محدود مجزا به عنوان تعمیمی از خاصیت $p-$ شور محدود بررسی می شوند و نتایج

مهم و کاربردی در این باره اثبات می‌شوند. در سرتاسر این مقاله فرض می کنیم که $1 \leq p < \infty$ مگر اینکه قید شود. برخی از تعاریف و نمادهای مربوط به مشبکه های با ناخ را یادآوری می‌کنیم. نرم روی یک مشبکه‌ی باناخ را پیوسته‌ی ترتیبی گوییم هرگاه برای هر تور (x_α) که $x_\alpha \downarrow 0$ در E داشته باشیم $\|x_\alpha\| \to 0$. منظور از $x_\alpha \downarrow 0$ یعنی تور (x_α) نزولی و $\underset{\alpha}{inf_\alpha}(x_\alpha) = 0$ زیرمجموعه‌ی A از X را صلب گوییم هرگاه $|y| \leq |x|$ و $y \in A$ نتیجه دهد $x \in A$ و غلاف صلب A را با $\mathrm{Sol(A)} = \{y \in E\colon |y| \leq |x| \ ، x \in A \text{ برای برخی}\}$ نمایش می دهیم.

در این مقاله، X نمایش فضای باناخ، X^* دوگان X، E مشبکه‌ی باناخ، $E^+ = \{x \in E : x \geq 0\}$ همان مخروط مثبت E و B_E گوی واحد بسته E است. یک زیر مجموعه از یک مشبکه‌ی باناخ را کران دار ترتیبی گوییم هرگاه درون یک بازهی ترتیبی قرار گیرد. برای مباحث مربوط به مشبکه های با ناخ، منابع [1,20] را ببینید.

۲. کلاسهای عملگرها و مجموعه های تقریباً L − محدود از مرتبه p

نماد مجموعه های L − محدود از مرتبه p در فضاهای باناخ توسط [16] تعریف شده است. در این بخش، نتایج بیشتری از این مجموعه ها در مشبکه های باناخ به دست می آیند. همچنین مشبکه های باناخی که در دوگان آنها این مجموعه ها فشرده‌ی ضعیف نسبی هستند، مطالعه می شوند. به عنوان یک کاربرد ، ارتباط بین خاصیت L − محدود و مشبکه های باناخ گروتندیک را به دست می آوریم.

یک مجموعه کران دار $B \subseteq X^*$ را L − محدود از مرتبه p (یا pL − محدود) گوییم هرگاه هر دنباله‌ی محدود $(x_n) \in l_p^w(X)$ روی آن به طور یکنواخت همگرا به صفر باشد، یا به طور معادل برای هر دنباله‌ی (f_n) در B و هر دنباله‌ی محدود $(x_n) \in l_p^w(X)$ ، $f_n(x_n) \to 0$.

با استفاده از عملگرهای p − همگرای محدود و مشابه با [21] لم زیر را برای خاصیت pL − محدود بیان می کنیم.

لم ۲. ۱ برای فضای باناخ X ،گزاره های زیر معادلند:

(a) X خاصیت pL − محدود دارد.

(b) برای هر فضای باناخ Y ، $L_{pc}(X.Y) = W(X.Y)$ که $L_{pc}(X.Y)$ فضای عمگرهای p − همگرا از X به Y است. همچنین $W(X.Y)$ فضای عملگرهای فشرده‌ی ضعیف از از X به Y است.

(c) $L_{pc}(X.l_\infty) = W(X.l_\infty)$

گزاره ۲ . ۲. برای یک فضای باناخ X ،گزاره های زیر معادلند:

(a) X خواص p − شور محدود و pL − محدود دارد.

(b) X بازتابی است.

برهان .

$a \Rightarrow b$) اگر خاصیت p− شور محدود داشته باشد، آن گاه عملگر همانی روی X یک عملگر p− همگرای محدود است[8، قضیه‌ی ۴۹ . ۸]. در نتیجه بنا به خاصیت pL− محدود و لم ۱. ۲ عملگر همانی روی X فشرده‌ی ضعیف خواهد شد. پس X بازتابی است.

$b \Rightarrow a$) واضح است. ■

نتیجه بعدی جواب مثبتی به سوال مطرح شده بعد از قضیه ۱. ۲ در [21] می دهد. یادآوری می کنیم که عملگر $T: E \to X$ فشرده‌ی ضعیف ترتیبی است اگر و تنها اگر برای هر دنباله‌ی مجزای کران دار ترتیبی (x_n) در E. $\|Tx_n\| \to 0$ [۱. قضیه‌ی ۵۷. ۵] .■

قضیه ۲. ۳ . برای یک مشبکه‌ی باناخ E، گزاره های زیر معادلند:

(*a*) E یک فضای گروتندیگ است.
(*b*) E خاصیت pL− محدود دارد.
(*c*) E خاصیت L− محدود دارد.

برهان.

$a \Rightarrow b$) بنا به[۲۰. قضیه‌ی ۱۳. ۳. ۵] هرعملگر فشرده‌ی ضعیف ترتیبی روی یک فضای گروتندیک عملگر فشرده‌ی ضعیف است. بنابراین با لم ۲. ۱ کافی است نشان دهیم هر عملگر p− همگرای روی E فشرده‌ی ضعیف ترتیبی است. فرض کنید $(x_n) \subseteq [0 . x]$ دنباله‌ی مجزا باشد و $x \subseteq E^+$ آن گاه بنا به [۱. صفحه‌ی ۱۹۲] ، (x_n) دنباله‌ی ۱- جمع پذیر ضعیف و در نتیجه p− جمع پذیر ضعیف خواهد بود (توجه کنید برای هر $1 \le p \le q$، $l_p^w(E) \subseteq l_q^w(E)$). همچنین بر طبق [۲. قضیه‌ی ۵. ۲] ، (x_n) باید محدود باشد. بنابراین از اینکه T عملگر p− همگراست، $\|Tx_n\| \to 0$. در این صورت، T فشرده‌ی ضعیف ترتیبی است و E خاصیت pL− محدود دارد.

$b \Rightarrow c$) واضح است.

$c \Rightarrow a$) یک مشبکه‌ی باناخ E، گروتندیک است اگر و تنها اگر $L(E.c_o) = W(E.c_o)$ [۲۰. قضیه‌ی 10. ۳. ۵]. چون c_o خاصیت GP دارد، $Lcc(E.c_o) = L(E.c_o)$ [۲۲. قضیه‌ی ۹. ۴] . بنا به خاصیت pL− محدود و مشابه با لم ۲. ۱ ، $Lcc(E.c_o) = W(E.c_o)$ و در نتیجه E یک فضای گروتندیک است.■

به عنوان یک نتیجه l_∞ یک فضای گروتندیک است و بنابراین خاصیت L− محدود را دارد. این نشان می دهد که خاصیت L− محدود ارثی نیست. از آنجائیکه c_o این خاصیت را ندارد. در واقع خاصیت L− محدود توسط زیر فضاهای متمم پذیر به ارث برده می شود.

نتیجه ۲. ۴ . فرض کنید E یک مشبکه‌ی باناخ با خاصیت $L-$ محدود باشد. آن گاه E^* نرم پیوسته ترتیبی دارد اما بر عکس این مطلب در حالت کلی درست نیست.

برهان. اگر E خاصیت $L-$ محدود داشته باشد، آن گاه E یک فضای گروتندیک است و بنا به [۲۰. قضیه‌ی ۱۳. ۳. ۵] E^* نرم پیوسته ترتیبی دارد. برعکس این مطلب درست نیست. به عنوان مثال، $l_1 = c_o^*$ نرم پیوسته ترتیبی دارد ولی c_o خاصیت $L-$ ندارد.

یک عملگر $T: E \to Y$ را $p-$ همگرای مجزا ($p-$ همگرای محدود مجزا) گوییم هرگاه T هر دنباله‌ی $p-$ جمع پذیر ضعیف مجزا ($p-$ جمع پذیر ضعیف محدود مجزا) در E را به یک دنباله‌ی نرم پوچ تصویر کند. هر عملگر $p-$ همگرای مجزا، یک عملگر $p-$ همگرای محدود مجزا نیز خواهد بود ولی برعکس این مطلب درست نیست. به عنوان مثال، عملگر همانی روی c_o یک عملگر $p-$ همگرای محدود مجزاست در حالیکه عملگر $p-$ همگرای مجزا نیست. توجه کنید که یک مشبکه‌ی باناخ E خاصیت $p-$شور مثبت دارد اگر و تنها اگر هر دنباله‌ی $(x_n) \in l_p^w(E)$ با جملات مثبت یک دنباله‌ی نرم پوچ باشد. به راحتی می توان نشان داد که یک مشبکه‌ی باناخ E خاصیت $p-$شور مثبت دارد اگر و تنها اگر عملگر همانی روی E، یک عملگر $p-$ همگرای مجزا باشد[۲۶].■

قضیه ۲. ۵ . هر عملگر $p-$ همگرای محدود مجزا روی یک مشبکه‌ی باناخ E فشرده‌ی ضعیف ترتیبی است ولی برعکس این مطلب درست نیست.

برهان. فرض کنید (x_n) یک دنباله‌ی کران دار ترتیبی مجزا در E باشد. آن گاه (x_n) دنباله‌ی $p-$ جمع پذیر ضعیف است. از این که T یک عملگر $p-$ همگرای مجزاست نتیجه می گیریم که $\|Tx_n\| \to 0$ و این رابطه نشان می دهد که T فشرده‌ی ضعیف ترتیبی است. برای برعکس، عملگر همانی روی c_o را در نظر بگیرید و توجه کنید بنا به [گزاره‌ی۶. ۳. ۳ ,۲۶]، c_o خاصیت $p-$شور مثبت را ندارد.■

واضح است که هر عملگر $p-$ همگرا یک عملگر $p-$ همگرای مجزا نیز هست ولی برعکس آن درست نیست. در واقع عملگر همانی روی هر یک مشبکه‌ی باناخ با خاصیت $p-$شور مثبت و بدون خاصیت $p-$شور (مانند$[0.1]$ L^1) $p-$ همگرای مجزاست در حالی که $p-$ همگرا نیست.

قضیه‌ی بعدی ارتباط بین عملگرهای فشرده‌ی ضعیف ترتیبی و عملگرهای $p-$ همگرای مجزا را بیان می کند.

قضیه ۲ .۶. فرض کنید E یک مشبکه‌ی باناخ کامل سیگما ددکیند باشد. آن گاه هر عملگر $p-$ همگرای مجزای محدود روی E فشرده‌ی ضعیف ترتیبی است و شرط کامل سیگما ددکیند بودن را نمی توان حذف کرد.

برهان. فرض کنید (x_n) یک دنباله‌ی کران دار ترتیبی مجزا در E باشد. بنا به [۱۹. لم۷. ۳] (x_n) دنباله‌ی $p-$ جمع‌پذیر ضعیف محدود است. حال از این که T یک عملگر $p-$ همگرای محدود مجزاست نتیجه می گیریم که $\|Tx_n\| \to 0$ و این

رابطه نشان می دهد که T فشرده‌ی ضعیف ترتیبی است. دقت کنید که شرط کامل سیگما ددکیند بودن را نمی توان حذف کرد. در حقیقت در [۵] ثابت شده است که هر دنباله‌ی پوچ ضعیف و تقریبا محدود $C[0.1]$ نرم پوچ است و در نتیجه عملگر همانی روی $C[0.1]$ یک عملگر $p-$ همگرای محدود مجزاست ولی فشرده‌ی ضعیف ترتیبی نیست.

(توجه کنید $C[0.1]$ نرم پیوسته‌ی ترتیبی ندارد). ■

اکنون با استفاده از دنباله های $p-$ جمع پذیر ضعیف مجزا در مشبکه های باناخ ، کلاس مجموعه های تقریبا $L-$ محدود از مرتبه‌ی p و خاصیت $L-$ محدود قوی از مرتبه‌ی p معرفی می شوند. یادآوری می کنیم اگر $A \subseteq E^*$ یک مجموعه‌ی کران دار باشد به طوری که هر دنباله‌ی پوچ ضعیف محدود مجزای (x_n) در E روی A به طور یکنواخت همگرا به صفر باشد، آن گاه A را یک مجموعه‌ی تقریبا $L-$ گوییم [۴].

تعریف ۲. ۷. زیر مجموعه‌ی نرم کران دار B از E^* تقریبا $L-$ محدود از مرتبه‌ی p (تقریبا $pL-$ محدود) گوییم هرگاه هر دنباله‌ی محدود مجزای $(x_n) \in l_p^w(E)$ روی B به طور یکنواخت همگرا به صفر باشد.

معادلا، $B \subseteq E^*$ تقریبا $pL-$ محدود است اگر و تنها اگر برای هرگاه هر دنباله‌ی محدود مجزای $(x_n) \in l_p^w(E)$ و هر دنباله‌ی (f_n) در B، $f_n(x_n) \to 0$.

قضیه ۲. ۸. گزاره های زیر معادلند:

(a) برای هر فضای باناخ Y و هر عمگر$p-$ همگرای محدود مجزای $T: E \to Y$ ، T^* پیش فشرده‌ی ضعیف (فشرده ضعیف، فشرده) است.

(b) هر مجموعه‌ی تقریبا $pL-$ محدود در E^*، پیش فشرده ضعیف (فشرده ضعیف نسبی، فشرده نسبی) است.

برهان.

$(a \Rightarrow b)$. فرض کنید $A \subseteq E^*$ یک مجموعه‌ی تقریبا $pL-$ محدود و(x_n^*) یک دنباله در A باشد. عملگر $T: E \to l_\infty$ را به شکل $T(x) = \left(x_n^*(x)\right)$ برای هر $x \in E$ تعریف کنید و فرض کنید (x_n) یک دنباله‌ی p- جمع پذیر محدود مجزا درE باشد. از اینکه A مجموعه‌ی تقریبا $pL-$ محدود است،

$\|Tx_n\| = \sup_m |x_m^*(x_n)| \to 0$ و بنابراین T عملگر $p-$همگرای محدود مجزاست. درنتیجه T^* یک عملگر پیش فشرده‌ی ضعیف (فشرده‌ی ضعیف، فشرده) است و بنابراین $T^*(e_n^*) = (x_n^*)$ پیش فشرده‌ی ضعیف (فشرده‌ی ضعیف نسبی، فشرده‌ی نسبی) است که (e_n^*)همان پایه‌ی واحد l_1 است.

$(b \Rightarrow a)$. فرض کنید هر مجموعه‌ی تقریبا $pL-$ محدود در E^*، پیش فشرده‌ی ضعیف (فشرده‌ی ضعیف نسبی، فشرده‌ی نسبی) و $T: E \to Y$ یک عملگر $p-$ همگرای محدود مجزا باشد. آن گاه $T^*B_{Y^*}$ یک مجموعه‌ی تقریبا $pL-$ محدود در E^* است و بنا به فرض نتیجه حاصل می شود.■

گزاره‌ی بعدی کلاس عملگرهای $p-$ همگرای مجزا را با مجموعه‌های تقریبا $pL-$ محدود معادل سازی می کند. در واقع برای هر عملگر $T: E \to F$ بنا به تساوی $\|Tx_n\| = sup_{f\in(T^*B_{F^*})}|f(x_n)|$ داریم:

گزاره ۲. ۹. برای هر عملگر $T: E \to F$ گزاره‌های زیر معادلند:

(a). T یک عملگز $p-$ همگرای محدود مجزاست.

(b). $T^*B_{F^*}$ یک مجموعه‌ی تقریبا $pL-$ محدود در E^* است.

تعریف ۲. ۱۰. یک مشبکه‌ی باناخ E خاصیت $L-$ محدود قوی ($pL-$ محدود قوی) دارد اگر هر زیر مجموعه‌ی تقریبا $L-$ محدود (تقریبا $pL-$ محدود) در E^* یک مجموعه‌ی فشرده‌ی ضعیف نسبی باشد. همچنین $T: E \to Y$ را کاملا پیوسته‌ی محدود مجزا گوییم هرگاه T هر دنباله‌ی پوچ ضعیف محدود مجزا در E را به یک دنباله‌ی نرم پوچ تصویر کند. کلاس این عملگرها را با $L^d cc(E.Y)$ نمایش می دهیم.

قضیه‌ی بعدی شرایطی معادل با مشبکه های باناخ با خاصیت $L-$ محدود قوی با استفاده ازکلاس عملگرهای $p-$ همگرای مجزا بیان می کند.

قضیه ۲. ۱۱. برای یک مشبکه‌ی E گزاره های زیر معادلند:

(a) E خاصیت $L-$ محدود قوی دارد.

(b) . برای هر فضای باناخ Y، $L^d cc(E.Y) = W(E.Y)$.

(c) . $L^d cc(E.l_\infty) = W(E.l_\infty)$

برهان.

$(a \Rightarrow b)$. فرض کنید $T: E \to Y$ یک عملگر کاملا پیوسته‌ی محدود مجزا باشد. آن گاه $T^*B_{Y^*}$ یک مجموعه‌ی تقریبا $L-$ محدود در E^* است. بنا به فرض، $T^*B_{Y^*}$ فشرده‌ی ضعیف نسبی است و در نتیجه T فشرده‌ی ضعیف است.

$(b \Rightarrow c)$. واضح است.

$(c \Rightarrow a)$. اگر E خاصیت $L-$ محدود قوی نداشته باشد، آن گاه یک مجموعه‌ی تقریبا $L-$ محدود A در E^* وجود دارد که T^*A فشرده‌ی ضعیف نسبی نیست. بنابراین یک دنباله‌ی (x_n^*) در A وجود دارد که هیچ زیر دنباله‌ی همگرای ضعیف ندارد. عملگر $T: E \to l_\infty$ با ضابطه‌ی $Tx = \left(x_n^*(x)\right)$ برای هر $x \in E$ را در نظر بگیرید. ازاینکه دنباله‌ی (x_n^*) تقریبا $L-$ محدود است، برای هر دنباله‌ی پوچ ضعیف محدود مجزای (x_m) در E نتیجه می گیریم که $\|Tx_m\| = \sup_n |x_n^*(x_m)| \to 0$. بنابراین T یک عملگر کاملا پیوسته‌ی محدود مجزاست. ساده است که برای هر $T^* e_n^* = x_n^*$ و در نتیجه T فشرده‌ی ضعیف خواهد بود.■

یک مشبکه‌ی باناخ E خاصیت GP مثبت دارد هرگاه هر دنباله‌ی پوچ ضعیف محدود با جملات مثبت در E نرم پوچ باشد. همچنین می توان نشان داد که E خاصیت GP مثبت دارد اگر و تنها اگر هر دنباله‌ی پوچ ضعیف محدود مجزا با جملات مثبت در E نرم پوچ باشد[۴].

قضیه ۲ . ۱۱. برای یک مشبکه‌ی باناخ E ،گزاره های زیر معادلند:

(a) . E بازتابی است.

(b) . E دو خاصیت GP مثبت و $L-$ محدود قوی دارد.

برهان .

$(a \Rightarrow b$. واضح است.

$(b \Rightarrow a$. اگر E خاصیت GP مثبت نداشته باشد آن گاه بنا به [۴. قضیه‌ی ۱۱. ۳] عملگر همانی روی E کاملا پیوسته محدود مجزاست و بنابر خاصیت $L-$ محدود قوی ، عملگر همانی فشرده‌ی ضعیف است. در نتیجه E بازتابی است. ■

مشابه با قضیه ۲. ۱۱ و با استقاده از عملگرهای $p-$ همگرای محدود مجزا ، شرایطی معادل برای مشبکه های باناخ با خاصیت $pL-$ محدود قوی پیدا می کنیم.

کلاس عملگرهای $p-$ همگرای محدود مجزا از E به Y را با $C_{lp}^{d}(E.Y)$ نمایش می دهیم.

قضیه ۲ . ۱۳. برای یک مشبکه‌ی باناخ E ،گزاره های زیر معادلند:

(a) . Eخاصیت $pL-$ محدود قوی دارد.

(b) . برای هر فضای باناخ Y ، $C_{lp}^{d}(E.Y) = W(E.Y)$.

(a) $C_{lp}^{d}(E.l_{\infty}) = W(E.l_{\infty})$.

۳. خاصیت p –شور محدود مجزا در مشبکه‌های باناخ

یک مشبکه‌ی باناخ E خاصیت شور مثبت دارد اگر و تنها اگر هر دنباله‌ی پوچ ضعیف مجزا با جملات مثبت در E نرم پوچ باشد [24]. همچنین E خاصیت $p-$شور مثبت دارد اگر و تنها اگر هر دنباله‌ی $p-$ جمع پذیرضعیف مجزا با جملات مثبت در E نرم پوچ باشد [26. گزاره‌ی ۴. ۱۴]

تعریف ۳. ۱. یک مشبکه‌ی باناخ E خاصیت $p-$شور محدود مجزا دارد اگر هر دنباله‌ی $p-$ جمع پذیرضعیف محدود مثبت در E نرم پوچ باشد.

با همان تکنیک های مشابه با [۱۴. لم ۷. ۳] و همچنین با استفاده از [۱۲.لم ۱] می توان لم زیر را نتیجه گرفت.

لم ۳. ۲. فرض کنید E یک مشبکه‌ی باناخ کامل سیگما ددکیند باشد. اگر (x_n) یک دنباله‌ی پوچ ضعیف مجزای تقریبا محدود در E باشد، آن گاه دنباله‌های مثبت (x_n^+)، (x_n^-) و $(|x_n|)$ همگی پوچ ضعیف و محدود هستند.

قضیه ۳. ۳. فرض کنید E یک مشبکه‌ی باناخ کامل سیگما ددکیند باشد.

اگر (x_n) یک دنباله‌ی پوچ ضعیف مجزای تقریبا محدود در E باشد، آن گاه E خاصیت p–شور محدود مجزا دارد اگر و تنها اگر هر دنباله‌ی $p-$ جمع پذیرضعیف محدود مثبت و مجزا در E نرم پوچ باشد.

برهان. فرض کنید E خاصیت p–شور محدود مجزا دارد و $(x_n) \in l_p^w(E)$ یک دنباله‌ی مثبت محدود مجزا باشد. بنا به لم ۳. ۲ و [26]، دنباله‌ی $(|x_n|)$ در E یک دنباله‌ی $p-$ جمع پذیرضعیف محدود است و بر طبق فرض، $\|x_n\| \to 0$.

برعکس، فرض کنید دنباله‌ی محدود مثبت $(x_n) \in l_p^w(E)$ و ثابت $c > 0$ وجود داشته باشد به طوری که $inf_n\|x_n\| = c > 0$. قرار دهید $y_n = c^{-1}x_n > 0$. آن گاه بنا به [نتیجه ۵, ۱۷] می توان زیر دنباله‌ی (y_{n_k}) ، ثابت $d > 0$ و دنباله‌ی (z_k) در E^+ را طوری پیدا کرد که $0 < z_k \leq y_{n_k}$ و $\|z_k\| \geq d$. واضح است که (z_k) یک دنباله‌ی $p-$ جمع پذیرضعیف محدود مجزا در E^+ است ولی $\|z_k\| \geq d$. این یک تناقض با فرض هست.■

نتیجه ۳. ۴. برای یک مشبکه‌ی باناخ E ،گزاره های زیر معادلند:

(a). E بازتابی است.

(b). E دو خاصیت $p-$ شور محدود مجزا و $pL-$ محدود قوی دارد.

یک مشبکه‌ی باناخ کامل سیگما ددکیند E نرم پیوسته‌ی ترتیبی دارد اگر و تنها اگر E خاصیت GP داشته باشد [۲۳. قضیه‌ی ۴. ۵]. در قضیه‌ی زیر ثابت می کنیم که همین نتیجه برای مشبکه های باناخ با خاصیت $p-$ شور محدود مجزا که ضعیف تر از خاصیت GP هست نیز برقرار است.

قضیه ۳. ۵ . فرض کنید E یک مشبکه‌ی باناخ کامل سیگما ددکیند باشد. گزاره های زیر معادلند:

(a). E خاصیت $p-$ شور محدود مجزا دارد.

(b). E نرم پیوسته‌ی ترتیبی دارد.

(c). B_{E^*} یک مجموعه‌ی تقریبا $pL-$ محدود است.

برهان.

$(a \Rightarrow b)$. از این که l_∞ خاصیت $p-$ شور محدود مجزا ندارد، نتیجه می گیریم که E نمیتواند هیچ کپی از l_∞ داشته باشد و در نتیجه بنا به [۲۰. نتیجه‌ی ۳ . ۴. ۲۰] ، E نرم پیوسته‌ی ترتیبی دارد

$(b \Rightarrow a$. اگر E نرم پیوسته‌ی ترتیبی داشته باشد، آن گاه E خاصیت GP و در نتیجه $p-$ شور محدود مجزا دارد.

$a \Leftrightarrow c$). به راحتی از قضیه‌ی ۳.۳ نتیجه می شود.

می توان نشان داد که در یک مشبکه‌ی باناخ کامل سیگما ددکیند، سه خاصیت GP، $p-$ شور محدود و $p-$ شور محدود مجزا معادل هستند.

یک فضای باناخ خاصیت دانفورد-پتیس ستاره از مرتبه‌ی p $(p-DP^*)$ دارد هرگاه هر زیرمجموعه‌ی $p-$فشرده‌ی ضعیف در آن یک مجموعه‌ی محدود باشد [15]. بر همین اساس، خاصیت دانفورد-پتیس ستاره‌ی ضعیف از مرتبه‌ی p $(p-wDP^*)$ برای مشبکه‌های باناخ در [6] معرفی شده‌اند. یک مشبکه‌ی باناخ خاصیت $p-wDP^*$ دارد هرگاه هر زیرمجموعه‌ی $p-$فشرده‌ی ضعیف در آن یک مجموعه‌ی تقریبا محدود باشد. بر اساس عملگرهای $p-$همگرای محدود مجزا به توی c_o یک مشخصه‌ی عملگری از مشبکه‌های باناخ کامل سیگما ددکیند بیان می‌کنیم که در آن ها هر مجموعه‌ی $p-$فشرده‌ی ضعیف یک مجموعه‌ی تقریبا محدود است. کلاس عملگرهای $p-$ همگرای مجزا از E به Y را با $C_p^d(E.Y)$ نمایش می دهیم. در فصل ۱۶ از [9] می‌توانید مباحث مربوط به نوع و هم نوع درفضاهای باناخ را مطالعه کنید.

قضیه ۳ . ۶. برای یک مشبکه‌ی باناخ E با نوع $1 < q \leq 2 . p \geq q'$ ، گزاره های زیر معادل هستند:

(a) . E خاصیت $p-wDP^*$ دارد.

(b) . برای هر فضای باناخ Y، $C_{lp}^d(E.Y) = C_p^d(E.Y)$.

(c) . $C_{lp}^d(E.c_o) = C_p^d(E.c_o)$.

برهان. $(a \Rightarrow b$. فرض کنید E خاصیت $p-wDP^*$ داشته باشد و $T: E \to Y$ یک عملگر $p-$ همگرای محدود مجزا باشد. اگر $(x_n) \in l_p^w(E)$ یک دنباله‌ی مجزا باشد، بنا به لم ۳. ۲ و [26]، دنباله‌ی $(|x_n|)$ در E یک دنباله‌ی $p-$ جمع پذیرضعیف محدود است و بر طبق فرض، $\|Tx_n\| \to 0$ و در نتیجه T یک عملگر $p-$ همگرای مجزاست.

$(b \Rightarrow c$. واضح است.

$(c \Rightarrow a$ نشان می‌دهیم برای هر دنباله‌ی $(x_n) \in l_p^w(E)$ و هر دنباله‌ی پوچ ضعیف ستاره‌ی مجزای (x_n^*) در E^*، $x_n^*(x_n) \to 0$. عملگر $T: E \to c_o$ با ضابطه‌ی

$Tx = \left(x_n^*(x)\right)$ برای هر $x \in E$ را در نظر بگیرید. چنین عملگری مجزا نامیده می‌شود و بنا به [نتیجه ۳. ۲, ۱۸]، T هر مجموعه‌ی تقریبا محدود را به یک مجموعه‌ی فشرده‌ی نسبی در c_o تصویر می‌کند. در نتیجه T یک عملگر $p-$ همگرای محدود مجزا و بنا به فرض یک عملگر $p-$ همگرای مجزاست. بنابراین، $\|Tx_n\| \to 0$ و در نتیجه $x_n^*(x_n) \to 0$. ■

قضیه ۳ . ۷. برای یک مشبکه‌ی باناخ کامل سیگما ددکیند E ،گزاره های زیر معادلند:

(a) . E خاصیت $p-$ شور محدود مجزا دارد.

(b) . برای هر فضای باناخ Y ، $L_{pc}^{d}(E.Y) = L(E.Y)$.

(c) . $L_{pc}^{d}(E.l_\infty) = L_{pc}^{d}(E.l_\infty)$.

برهان.

$(a \Rightarrow b)$. فرض کنید Eخاصیت $p-$ شور محدود مجزا داشته و $T: E \to Y$ یک عملگر باشد. اگر $(x_n) \in l_p^w(E)$ یک دنباله‌ی محدود مجزا باشد، بنا به فرض، $\|x_n\| \to 0$ و در نتیجه $\|Tx_n\| \to 0$.

$b \Rightarrow c$. واضح است.

$(c \Rightarrow a)$. اگر E خاصیت $p-$ شور محدود مجزا نداشته باشد، آن گاه دنباله‌ی محدود مجزای $(x_n) \in l_p^w(E)$ با نرم یک وجود دارد. بنابراین می‌توان دنباله‌ی (x_n^*) در B_{E^*} پیدا کرد که $|x_n^*(x_n)| = 1$. حال عملگر $T: E \to l_\infty$ تعریف شده با ضابطه‌ی $Tx = \left(x_n^*(x)\right)$ برای هر $x \in E$ نمی‌تواند یک عملگر $p-$ همگرای محدود مجزا باشد.■

یادآوری می‌کنیم که یک مشبکه‌ی باناخ خاصیت دانفورد-پتیس ضعیف (wDP) دارد هرگاه هر عملگر فشرده‌ی ضعیف روی E تقریبا دانفورد-پتیس باشد، یعنی هر دنباله‌ی پوچ ضعیف مجزا را به یک دنباله‌ی نرم پوچ تصویر کند. بر همین اساس، یک مشبکه‌ی باناخ E را دارای خاصیت دانفورد-پتیس ضعیف از مرتبه‌ی p $(p - wDP)$ گوییم هرگاه هر عملگر فشرده‌ی ضعیف روی E یک عملگر $p-$ همگرای مجزا باشد. به عبارتی دیگر برای هر دنباله‌ی مجزای $(x_n) \in l_p^w(E)$ و هر دنباله‌ی پوچ ضعیف (x_n^*) در E^*، $x_n^*(x_n) \to 0$. واضح است که هر عملگر فشرده‌ی ضعیف یک عملگر $p-$ همگرای محدود مجزا نیز هست.

قضیه ۳. ۸ . برای یک مشبکه‌ی باناخ E ،گزاره های زیر معادلند:

(a). E بازتابی با خاصیت $p - wDP$ است.

(b). E دو خاصیت $p-$ شور مثبت و $pL-$ محدود قوی دارد.

برهان.

$(a \Rightarrow b)$. اگر E خاصیت $p-$ شور مثبت داشته باشد، آن‌گاه هر عملگر روی E یک عملگر $p-$همگرای مجزاست و در نتیجه بنا به خاصیت $pL-$ محدود قوی یک عملگر فشرده‌ی ضعیف خواهد بود. بنابراین E بازتابی است. واضح است که خاصیت $p-$ شور مثبت خاصیت $p - wDP$ را نتیجه می‌دهد.

$(b \Rightarrow a)$. اگر E بازتابی باشد، آن‌گاه عملگر همانی روی E یک عملگر فشرده‌ی ضعیف خواهد بود. بنابر خاصیت $p - wDP$ این عملگر $p-$ همگرای مجزاست و در نتیجه E خاصیت $p-$ شور مثبت دارد. واضح است که هر فضای بازتابی خاصیت $pL-$ محدود قوی نیز دارد.■

اگر $M \subseteq L(X.Y)$ یک مشبکه‌ی باناخ کامل سیگما ددکیند باشد و M خاصیت $p-$ شور محدود مجزا داشته باشد، آن‌گاه بنا به قضیه‌ی ۳. ۷ عملگرهای محاسبه‌ای φ_x و ψ_{y^*} روی M دو عملگر p –همگرای مجزا هستند به طوری که برای

هر $T \in M.x \in X.y^* \in Y^*$ داریم $\varphi_x(T) = Tx$ و $\psi_{y^*}(T) = T^*y^*$.

می‌توان نشان داد که $p-$ همگرای مجزا بودن عملگرهای محاسبه‌ای یک شرط کافی برای این هست که دامنه‌ی این عملگرها خاصیت $p-$ شور محدود مجزا داشته باشد. دقت کنید که برای اثبات می‌توان از همان تکنیک های استفاده شده در

[4, 21] استفده کرد.

قضیه ۳. ۹. فرض کنید $X.Y$ دو فضای باناخ باشند. آن‌گاه:

(a). اگر $M \subseteq L(X.Y)$ یک مشبکه‌ی باناخ کامل سیگما ددکیند باشد و برای هر $y^* \in Y^*$ عملگر ψ_{y^*} روی M یک عملگر p –همگرای محدود مجزا باشد، آن‌گاه M خاصیت $p-$ شور محدود مجزا دارد.

(b). اگر $M \subseteq L_{w^*}(X^*.Y)$ یک مشبکه‌ی باناخ کامل سیگما ددکیند باشد و برای هر $x^* \in X^*$ عملگر φ_{x^*} روی M یک عملگر p –همگرای محدود مجزا باشد، آن‌گاه M خاصیت $p-$ شور محدود مجزا دارد.

آخرین نتیجه ، مشبکه‌های باناخی را معادل سازی می‌کند که در دوگان آن‌ها مجموعه‌های تقریبا $pL-$محدود و pL –محدود یکی هستند.

قضیه ۳ . ۱۰. برای یک مشبکه‌ی باناخ کامل E گزاره های زیر معادلند:

(a) هر مجموعه‌های تقریبا $pL-$محدود در E^* یک مجموعه‌های pL –محدود است.

(b) برای هر فضای باناخ Y، $L_{pc}^d(E.Y) = L_{pc}(E.Y)$.

(c) . $L_{pc}^d(E.l_\infty) = L_{pc}(E.l_\infty)$.

برهان.

$(a \Rightarrow b$. از تساوی $\|Tx_n\| = sup_{f\in(T^*B_{Y^*})}|f(x_n)|$ برای هر دنباله‌ی $(x_n) \in E$ و هر عملگر $T: E \to Y$ به راحتی نتیجه حاصل می‌شود.

$(b \Rightarrow c$. واضح است.

$(c \Rightarrow a$. اگر $B \subseteq E^*$ یک مجموعه‌ی تقریبا pL –محدود باشد، کافیست نشان دهیم برای هر دنباله‌ی (f_n) در B، $f_n(x_n) \to 0$. عملگر $T: E \to l_\infty$ با ضابطه‌ی

$Tx = (f_n(x))$ برای هر $x \in E$ را در نظر بگیرید. از اینکه $B \subseteq E^*$ یک مجموعه‌ی تقریبا pL–محدود است، T یک عملگر $p-$ همگرای محدود مجزا و بنا به فرض یک عملگر$p-$ همگرای محدود مجزاست. بنابراین،

$\|Tx_n\| \to 0$ و در نتیجه $f_n(x_n) \to 0$. ■

References

1. C. D. Aliprantis and O. Burkishaw, Positive operators, Academic Press, New York and London, 1978.

2. B. Aqzzouz and K. Bouras, Dunford-Pettis sets in Banach lattices, Acta Math. Univ. Comenianae, **81** (2013), 185 – 196.

3. B. Aqzzouz and K. Bouras, L–sets and almost L– sets in Banach lattices, Quaestiones Mathematicae, **36** (2013), 107 – 118.

4. H. Ardakani, S. M. S. Modarres Mosadegh, M. Salimi and S. M. Moshtaghioun, L-limited and almost L-limited sets in dual Banach Lattices, J. Math. Ext.,**12** (2018), 147 – 163.

5. H. Ardakani, S.M. Moshtaghioun, S. M. S. Modarres Mosadegh and M. Salimi, The strong Gelfand-Phillips property in Banach lattices, Banach J. Math. Anal., **10** (2016), 15 – 26.

6. H. Ardakani and Kh. Taghavinejad, The strong limited p-Schur property in Banach lattices, OaM, **16** (2022), 811 – 825.

7. J. Castillo and F. Sanchez, Dunford-Pettis-like properties of continuous vector function spaces, Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid, **6** (1993), 43 – 59.

8. M. B. Dehghani, S. M. Moshtaghioun and M.Dehghani, On the limited p-Schur propety of some operator spaces, IJAA. **16** (2018), 50 – 61.

9. J. Diestel, Absolutely Summing Operators, Cambridge University Press, (1995).

10. J. Diestel, Sequences and Series in Banach Spaces, Graduate Texts in Math. 92, Springer–Verlag, Berlin, 1984.

11. L. Drewnowski, On Banach spaces with the Gelfand-Phillips property, Math. Z. **193** (1986), 405 – 411.

12. A. Elbour, Some characterizations of almost limited operators, Positivity. **21** (2017), 865 – 874.

13. G. Emmanuele, On Banach spaces with the Gelfand–Phillips property, III, J. Math. Pures Appl. **72** (1993), 327 – 333.

14. K.E. Fahri, N. Machrafi and M. Moussa, Banach Lattices with the Positive Dunford–Pettis Relatively Compact Property, E.M. **30** (2015), 161 – 179.

15. J. H. Fourie and E. D. Zeekoei, DP*-properties of order p on Banach spaces, Quaest. Math. **37** (2014), 349 – 358.

16. I. Ghenciu, The p-Gelfand-Phillips property in spaces of operators and Dunford-Pettis like sets, Acta Math. Hungar., **155** (2018), 439 – 457.

17. G. Groenewegen and P. Meyer-Nieberg, An elementary and unified approach to disjoint sequence theorems, Indag. Math. **48** (1986), 313 – 317.

18. P. Galindo and V. C. C. Miranda, Grothendieck-type subsets of Banach lattices, J. Math. Anal. Appl. **506** (2022), 1 – 14.

19. A. El. Kaddouri, M. Moussa, About the class of ordered limited operators, Acta Universitatis Carolinae. Mathematica et Physica, **54** (2013), 37 – 43.

20. P. Meyer- Nieberg, Banach lattices, Universitext, springer- Verlag, Berlin, 1991.

21. M. Salimi and S. M. Moshtaghioun, A new class of Banach spaces and its relation with some geometric properties of Bancah spaces, Hindawi Publishing Corporation, Abstract and Applied Analysis, 2012.

22. M. Salimi and S. M. Moshtaghioun, The Gelfand-Phillips property in closed subspaces of some operator spaces, Banach J. Math. Anal. 2 (2011), 84 – 92.

23. W. Wnuk , Banach Lattices with Order Continuous Norms, Polish Scientific Publishers PWN, Warsaw, 1999.

24. W. Wnuk, Banach lattices with properties of the Schur type- a survey, Conf. Sem. Mat. Univ. Bari, **249** (1993), 1 – 25.

25. W. Wnuk, Banach lattices with the weak Dunford–Pettis property, Atti Semin. Mat. Fis. Univ. Modena, **42** (1994), 227 – 236.

26. E. Zeekoei and J. Fourie, Classes of Dunford-Pettis-type operators with applications to Banach spaces and Banach lattices, PHD Thesis, **27** pp. (2017).