



Kharazmi University

## Classification Bi-Algebras of Order Less Than 5 with Their Ideals

A. Radfar<sup>1</sup>  

1. Corresponding Author, Department of Mathematics, Payame Noor University, p. o. box. 19395-3697, Tehran, Iran. ✉  
E-mail: [radfar@pnu.ac.ir](mailto:radfar@pnu.ac.ir)

### Article Info

**Article type:**  
Research Article

**Article history:**

Received: 12 April 2023  
Received in revised form:  
18 August 2024  
Accepted: 26 August 2024  
Published online:  
10 November 2024

**Keywords:**

BI-algebra,  
Classification,  
Commutative algebra,  
BCK-algebra,  
Transitive algebra,  
P-semi simple.

### ABSTRACT

#### Introduction

Algebraic structures have become crucial in expanding scientific knowledge across disciplines such as physics, medical engineering, social sciences, and computer science. In 1958, Chang introduced the concept of BI-algebras. Extensions of BI-algebras, such as pseudo BI-algebras, hyper BI-algebras, have further applications in interpreting complex structures across these fields. This paper contributes to the classification of finite BI-algebras of order 2, 3, and 4 detailing their unique properties to enhance understanding and facilitate applications.

#### Material and Methods

The paper employs existing foundational theorems and definitions of BI-algebras, focusing on essential properties such as commutativity, transitivity, and distributivity. Using these properties, the classification of BI-algebras of order 2, 3, and 4 is achieved through systematic construction and analysis of Cayley tables. For each algebra, the classification approach identifies isomorphic structures and distinguishes them by unique ideal structures. The method involves defining and verifying homomorphisms that preserve these isomorphic structures.

#### Results and discussion

The analysis confirms that, up to isomorphism, only one BI-algebra exist at order 2, two distinct BI-algebras exist at order 3, and eight at order 4. Each algebra's structure and properties are summarized in corresponding Cayley tables. The results reveal specific algebras that are uniquely commutative, transitive, and distributive. Additionally, the paper discusses the impact of these properties on the ideal structure, where each BI-algebra is analyzed for its set of ideals.

#### Conclusion

This study successfully classifies BI-algebras of order less than 5, contributing valuable insights into their structural and ideal properties. By explicitly presenting all possible isomorphic classes and analyzing ideal structures, the paper offers a comprehensive reference for researchers working with BI-algebras and related algebraic systems. The findings provide a robust foundation for further applications of BI-algebras in various scientific and mathematical fields, enhancing their utility in modeling complex logical and structural systems.

**How to cite:** Radfar, A. (2024). Classification BI-algebras of order less than 5 with their ideals. *Mathematical Researches*, **10** (3), 52 – 71.



© The Author(s).

Publisher: Kharazmi University

## رده‌بندی BI-جبرهای از مرتبه کمتر از ۵ و ایده‌آل‌های آن‌ها

عاکفه رادفر<sup>۱</sup> ✉

۱. گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران. رایانامه: [radfar@pnu.ac.ir](mailto:radfar@pnu.ac.ir)

چکیده	اطلاعات مقاله
در این مقاله، تمام جداول کیلی $BI$ -جبرهای از مرتبه ۲، ۳ و ۴ در حد یکرختی نمایش داده شده و رده‌بندی شده است. در این مقاله اثبات شده که هر $BI$ -جبرجابجایی و پخشی یک $BCK$ -جبر است. علاوه بر این ثابت شده است که در حد یکرختی تنها یک $BI$ -جبر از مرتبه ۲، دو $BI$ -جبر از مرتبه ۳ و هشت $BI$ -جبر از مرتبه ۴ وجود دارد. همچنین بررسی شده است که کدام یک از این جبرها جابجایی، کدام یک متعدی و کدام یک پخشی هستند. تمام ایده‌آل‌های هر $BI$ -جبر نیز در این مقاله به نمایش گذاشته شده است.	نوع مقاله: مقاله پژوهشی تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۱/۲۳ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۵/۲۸ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۶/۰۵ تاریخ انتشار: ۱۴۰۳/۸/۲۰

### واژه‌های کلیدی:

BI-جبر،  
رده‌بندی،  
جبر جابجایی،  
BCK-جبر،  
جبر متعدی.

استناد: رادفر، عاکفه؛ (۱۴۰۳). رده‌بندی BI-جبرهای از مرتبه کمتر از ۵ و ایده‌آل‌های آن‌ها. پژوهش‌های ریاضی، ۱۰ (۳)، ۵۲ - ۷۱.



© نویسندگان.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

## ۱. مقدمه

در عصر حاضر ساختارهای جبری، نقش بسزایی در توسعه مرزهای دانش و تولید علم دارند و مورد توجه محققان و پژوهش‌گران در علوم مختلف مانند فیزیک، مهندسی پزشکی، علوم اجتماعی، نظریه گراف، ریاضیات، علوم کامپیوتر، محاسبات نرم، نظریه اتومات‌ها و ... قرار گرفته‌اند. در سال ۱۹۵۸ چانگ<sup>۱</sup>، مفهوم  $MV$ -جبر را ارائه کرد و با استفاده از آن در سال ۱۹۵۹ توانست، اثبات جبری خاصی برای تمامیت منطق بی‌نهایت ارزشی لوکاسیویچ ارائه نماید. بعد از معرفی  $MV$ -جبرها، جبرهای حاصل‌ضربی و جبرهای گودل معرفی شدند که این سه نوع جبر دقیقاً مدل‌های جبری برای منطق لوکاسیویچ<sup>۲</sup>، منطق ضربی و منطق گودل هستند و در تفسیر منطق فازی اهمیت ویژه‌ای دارند.

یکی دیگر از ساختارهای جبری که در سایر علوم کاربرد دارد، جبرهای استلزامی می‌باشند. مطالعه  $BCK$ -جبرها و  $BCI$ -جبرها برای نخستین بار در سال ۱۹۶۶ توسط دو ریاضیدان به نام‌های ایمای<sup>۳</sup> و ایزاکی<sup>۴</sup> به‌عنوان تعمیمی از منطق گزاره‌ای معرفی شد [۹]. دسته‌ای وسیع‌تر از جبرهای مجرد به نام  $BCH$ -جبرها توسط هو<sup>۵</sup> و لی<sup>۶</sup> در سال ۱۹۸۳ معرفی شد. آنها نشان دادند که کلاس  $BCH$ -جبرها یک توسعه سره از کلاس  $BCI$ -جبرها هست [۸]. مفهوم جبرهای استلزامی در سال ۱۹۶۷ توسط ابوت<sup>۷</sup> ارائه شد [۱]. نیجرز و کیم<sup>۸</sup> بعد از معرفی  $d$ -جبرها که تعمیمی از  $BCK$ -جبرها می‌باشند، در مورد ارتباط بین این دو جبر تحقیق نمودند [۱۲].

در سال ۲۰۰۶ برزویی و خسروی شعار ثابت کردند که کلاس جبرهای استلزامی و دوگان  $BCK$ -جبرهای استلزامی یکسان هستند [۵]. سپس در سال ۲۰۰۷، کیم و کیم تعمیمی از دوگان  $BCK$ -جبرها با عنوان  $BE$ -جبرها را معرفی نمودند [۱۰]. تعمیمی از دوگان جبرهای استلزامی و  $BCK$ -جبرهای استلزامی با عنوان  $BI$ -جبرها در سال ۲۰۱۷ توسط برومند سعید و همکارانش ارائه شد [۴]. آنها مفهوم ایده‌آل و رابطه هم‌نهشتی روی این جبر جدید را مورد بررسی و پژوهش قرار داده و نشان دادند، هر  $BCK$ -جبر استلزامی یک  $BI$ -جبر است؛ اما عکس این رابطه همواره برقرار نیست.

اهن<sup>۹</sup> و همکاران در سال ۲۰۱۹ با تعریف زیرجبرهای نرمال،  $BI$ -جبرهای خارج‌قسمتی را معرفی کردند [۲]. نیازیان در سال ۲۰۲۱ موفق به ارائه مفهوم ابر  $BI$ -جبرها شد و با تعریف ابر زیرجبر و ابرایده‌آل در ابر  $BI$ -جبرها نتایج متعددی به دست آورد [۱۵]. سلیمانی در پایان‌نامه دکتری خود به بررسی خواص  $BI$ -جبرها پرداخته و نتایج متعددی به دست آورده است. وی همچنین  $BI$ -جبرهای جابجایی را مورد بررسی قرار داده و نشان داده است که هر  $BI$ -جبر جابجایی یک  $BH$ -جبر جابجایی است [۱۸]. اخیراً، رادفر و رضایی سودو  $BI$ -جبرها را تعریف کرده و حالت‌های مختلفی از سودو  $BI$ -جبرها را مورد بررسی قرار داده‌اند و نتایج متعددی به‌دست آورده‌اند. آنها ثابت کردند سودو  $BI$ -جبر از مرتبه ۴ وجود ندارد، هر سودو  $BI$ -جبر از مرتبه ۴ یک ترتیب

<sup>1</sup> Chang

<sup>2</sup> Lukasiewicz

<sup>3</sup> Imai

<sup>4</sup> Iseki

<sup>5</sup> Hu

<sup>6</sup> Li

<sup>7</sup> Abbott

<sup>8</sup> Neggers and Kim

<sup>9</sup> Ahn

جزئی است و هر سودو  $BI$ -جبر جابجایی تحت شرایطی، یک جبر استلزام است [۱۶]. با توجه به این که رده بندی یک ساختار جبری می تواند به درک بهتر و شناخت دقیق تر یک ساختار جبری کمک کند، مقاله های متعددی در زمینه رده بندی ساختارهای جبری گوناگون وجود دارد [۳، ۶، ۱۳، ۱۴، ۱۷، ۱۹]. در ضمن مثال های ارائه شده در این مقاله برای نویسندگان و محققانی که روی این ساختار جبری یا ساختارهای جبری مشابه آن تحقیق می کنند می تواند بسیار مفید باشد. از این جهت در این مقاله همه  $BI$ -جبرهای متناهی از مرتبه ۲، ۳ و ۴ با مشخص کردن جداول کیلی شان، رده بندی و شمارش شده است. در مورد هر  $BI$ -جبر، علاوه بر نمایش مجموعه تمام ایده آل های مربوطه اش، برخی خواص آن ها را بررسی و ثابت کردیم هر  $BI$ -جبر جابجایی و پخشی یک  $BCK$ -جبر است.

## ۲. مفاهیم و تعاریف مقدماتی

در این بخش تعاریف، قضایا و نتایج از قبل به دست آمده که برای نوشتن این مقاله نیاز هست، ارائه شده است.

**تعریف ۲.۱.** [۴] یک  $BI$ -جبر  $(X, *, 0)$  جبری از نوع  $(2, 0)$  است که برای هر  $x, y \in X$  در دو شرط زیر صدق کند:

$$(B) \quad x * x = 0,$$

$$(BI) \quad x * (y * x) = x.$$

فرض کنید  $(X, *, 0)$  یک  $BI$ -جبر باشد، رابطه " $\leq$ " روی  $X$  به صورت زیر تعریف شده است:

$$x \leq y \text{ اگر و فقط اگر } x * y = 0$$

توجه داریم رابطه  $\leq$  که در این جا تعریف شده است، جزئاً مرتب نیست و فقط خاصیت بازتابی دارد.

**قضیه ۲.۲.** [۴] در هر  $BI$ -جبر برای هر  $x, y, z \in X$  روابط زیر برقرار است:

$$, x * 0 = x (p_1)$$

$$, 0 * x = 0 (p_2)$$

$$, x * y = (x * y) * y (p_3)$$

$$, X = \{0\} \text{ اگر } y * x = x \text{ آن گاه } (p_4)$$

$$, X = \{0\} \text{ اگر برای هر } x, y, z \in X, x * (y * z) = y * (x * z) \text{ آن گاه } (p_5)$$

$$, X = \{0\} \text{ اگر } x * y = z \text{ آن گاه } y * z = y \text{ و } z * y = z (p_6)$$

$$, X = \{0\} \text{ اگر } (x * y) * (z * u) = (x * z) * (y * u) \text{ آن گاه } (p_7)$$

$BI$ -جبر  $X$  را

الف- پخشی راست یا به‌اختصار پخشی گویند، هرگاه برای هر  $x, y, z \in X$ ،  $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$ ،

ب- جابجایی گویند، هرگاه برای هر  $x, y \in X$ ، داشته باشیم  $x * (x * y) = y * (y * x)$ ،

ج- متعددی گویند، هرگاه برای هر  $x, y, z \in X$  از  $x \leq y$  و  $y \leq z$  نتیجه شود  $x \leq z$ .

برومند سعید و همکارانش ثابت کردند فقط در مورد BI-جبر  $X = \{0\}$  می‌تواند پخشی چپ باشد، همچنین آنها ثابت کردند که اگر  $X$  پخشی باشد، آن‌گاه رابطه " $\leq$ " روی  $X$  خاصیت تعدی دارد [۴].

خواص یک BI-جبر پخشی در قضیه زیر آورده شده است.

قضیه ۳.۲. [۴] در هر BI-جبر پخشی برای هر  $x, y, z \in X$  روابط زیر برقرارند:

$$y * x \leq y \quad (p_8)$$

$$y * (y * x) \leq x \quad (p_9)$$

$$x * (x * y) \leq x \quad (p_{10})$$

$$0 = ((x * y) * (z * y)) * (x * z) = ((x * y) * (x * z)) * (z * y) \quad (p_{11})$$

$$x * z \leq y * z, \text{ آن‌گاه } x \leq y \quad (p_{12})$$

$$(x * y) * z \leq x * (y * z) \quad (p_{13}) \text{ (یک جبر شبه شرکت‌پذیر است)}$$

$$\text{اگر } x * y = z * y, \text{ آن‌گاه } (x * z) * y = 0 \quad (p_{14})$$

با استفاده از خواص فوق روابط زیر برقرار است:

$$\text{اگر } x * y = x, \text{ آن‌گاه } y * x = y \quad (p_{15})$$

$$\text{اگر } x * y \neq x, \text{ آن‌گاه } y * x \neq y \quad (p_{16})$$

$$x * y \neq y \quad (p_{17})$$

$$\text{اگر } x * y \neq x, \text{ آن‌گاه } z * x \neq y \quad (p_{18})$$

تعریف ۴.۲. [۴] زیرمجموعه  $I$  از BI-جبر  $X$  را ایده‌آل گویند، هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

$$\text{الف- } 0 \in I$$

ب- برای هر  $x, y \in X$ ، از  $x, y \in I$  و  $x * y \in I$  بتوان نتیجه گرفت  $x \in I$ .

در این مقاله مجموعه همه ایده آل های BI-جبر  $X$  را با  $I(X)$  نشان می دهیم.

**تعریف ۵.۲.** [۱۱] جبر  $(X, *, 0)$  از نوع  $(۲, ۰)$  را BCK-جبر گویند، هرگاه برای هر  $x, y, z \in X$  در شرایط زیر صدق کند:

$$((x * y) * (x * z)) * (z * y) = 0 \quad (BCK_1)$$

$$x * 0 = x \quad (BCK_2)$$

$$\text{اگر } x * y = y * x = 0, \text{ آن گاه } x = y \quad (BCK_3)$$

$$0 * x = 0 \quad (BCK_4)$$

BCK-جبر  $X$  را استلزامی گویند، هرگاه برای هر  $x, y \in X$  در شرط (BI) صدق کند. BCK-جبر  $X$  را استلزامی مثبت گویند، هرگاه برای هر  $x, y, z \in X$  در شرط  $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$  صدق کند.

**تعریف ۶.۲.** [۷] مجموعه غیرتهی  $X$  همراه با عمل دوتایی "\*" و عدد ثابت 0 را یک دوگان جبر هیلبرت گویند هرگاه برای هر  $x, y \in X$  در شرایط زیر صدق کند:

$$(x * y) * x = 0 \quad (DHA1)$$

$$((z * x) * (y * x)) * ((z * y) * x) = 0 \quad (DHA2)$$

$$\text{از } x * y = 0 \text{ و } y * x = 0 \text{ نتیجه بگیریم } x = y \quad (DHA3)$$

دوگان جبر هیلبرت  $X$  را جابجایی گویند، هرگاه برای هر  $x, y \in X$  داشته باشیم  $x * (x * y) = y * (y * x)$ .

**قضیه ۷.۲.** [۷] دوگان جبر هیلبرت  $X$ ، برای هر  $x, y, z \in X$  در خواص زیر صدق می کند:

$$\text{الف- } (x * y) * z = (x * z) * y$$

$$\text{ب- } x * 0 = x$$

$$\text{ج- } 0 * x = 0$$

**قضیه ۸.۲.** [۱۷] کلاس BI-جبرهای جابجایی و پخشی و کلاس دوگان جبر هیلبرت جابجایی یکسانند.

**تعریف ۹.۲.** [۲] نگاشت  $f : (X, *) \rightarrow (Y, \circ)$  را یکریختی گویند، هرگاه یک به یک و پوشا باشد و به ازای هر  $x, y \in X$  در شرط  $f(x * y) = f(x) \circ f(y)$  صدق کند. BI-جبرهای  $(X, *)$  و  $(Y, \circ)$  را یکریخت گویند و می نویسیم  $(X, *) \cong (Y, \circ)$ ، هرگاه یک یکریختی بین آنها موجود باشد.

### ۳. BI-جبرهای از مرتبه دو و سه

در این بخش BI-جبرهای مرتبه دو و سه را رده‌بندی کرده و جدول کیلی آن‌ها را به نمایش می‌گذاریم. برای این منظور، با استفاده از تعریف BI-جبر و قضایای ۲,۲ و ۳,۲ ثابت می‌کنیم که تنها یک BI-جبر از مرتبه دو در حد یکرختی و دو BI-جبر از مرتبه سه در حد یکرختی وجود دارد.

قضیه ۱.۳. فقط یک BI-جبر از مرتبه دو در حد یکرختی وجود دارد.

برهان. فرض کنید  $X = \{0, a\}$ . با استفاده از  $(p_1)$ ،  $(p_2)$  و  $(B)$  نتیجه می‌گیریم  $0 * 0 = 0 * a = a * a = 0$  و  $a * 0 = a$ ؛ بنابراین فقط یک BI-جبر از مرتبه دو با جدول زیر وجود دارد که پخشی راست نیز هست.

جدول ۱. BI-جبر از مرتبه ۲

*	0	a
0	0	0
a	a	0

$$I(X) = \{\{0\}, \{0, a\}\}. \square$$

قضیه ۲.۳. تعداد BI-جبرهای مرتبه سه در حد یکرختی برابر ۲ است.

برهان. فرض کنید  $X = \{0, a, b\}$ . بنا بر  $(p_1)$ ،  $(p_2)$  و  $(B)$  داریم:

$$b * 0 = b \text{ و } 0 * 0 = 0 * a = 0 * b = b * b = a * a = 0, \quad a * 0 = a.$$

با استفاده از  $(p_{17})$ ، نتیجه می‌گیریم  $a * b \neq b$ ؛ بنابراین  $a * b \in \{0, a\}$ . اگر  $a * b = a$ ، آن‌گاه بنا بر  $(p_{15})$ ،  $b * a = b$ . اگر  $a * b = 0$ ، آن‌گاه با استفاده از  $(p_{16})$ ، نتیجه می‌گیریم  $b * a \neq b$ . همچنین بر طبق  $(p_{17})$ ،  $b * a \neq a$ ؛ بنابراین  $b * a = 0$  و دو جدول کیلی زیر را می‌یابیم که هر دو مورد پخشی هستند و  $(X, *_1, 0)$  جابجایی نیز هست.

جدول ۳. BI-جبر جابجایی و پخشی

* <sub>1</sub>	0	a	b
0	0	0	0
a	a	0	a
b	b	b	0

$$I(X) = \{\{0\}, \{0, a\}, \{0, b\}, \{0, a, b\}\}$$

جدول ۲. BI-جبر جابجایی

* <sub>2</sub>	0	a	b
0	0	0	0
a	a	0	0
b	b	0	0

$$I(X) = \{\{0\}, \{0, a, b\}\}. \square$$

#### ۴. $BI$ -جبرهای مرتبه ۴

در این بخش  $BI$ -جبرهای مرتبه ۴ را رده بندی می کنیم. برای این منظور با در نظر گرفتن  $BI$ -جبر  $X = \{0, a, b, c\}$ ، حالت‌های مختلف برای  $a*b$  و  $a*c$  را بررسی می کنیم و با استفاده از این حالت‌ها، تمامی  $BI$ -جبرهای ممکن را مورد تحلیل قرار می دهیم. ابتدا لم‌های کلیدی را مطرح می کنیم که هر کدام از آنها یکی از حالات ممکن برای  $a*b$  و  $a*c$  را بررسی می کند. سپس با استفاده از این لم‌ها و قضایای مرتبط، رده بندی دقیقی از  $BI$ -جبرهای مرتبه ۴ ارائه می شود. جداول کیلی متناظر با این  $BI$ -جبرها نمایش داده می شوند که در آنها خواص جابجایی، پخشی و متعدی بودن بررسی می گردد. این تحلیل به ما اجازه می دهد تا تمامی  $BI$ -جبرهای مرتبه ۴ را که از نظر یکرختی متفاوت هستند، شناسایی و دسته بندی کنیم. لازم به ذکر است در سرتاسر این بخش فرض بر این است که  $X = \{0, a, b, c\}$  یک  $BI$ -جبر است.

$$\text{لم ۱,۴. (الف)} \quad 0*0 = 0*a = 0*b = 0*c = 0$$

$$\text{(ب)} \quad a*a = b*b = c*c = 0$$

$$\text{(ج)} \quad a*0 = a, b*0 = b, c*0 = c$$

برهان. با استفاده از  $(p_1)$ ،  $(p_2)$  و  $(B)$  اثبات بدیهی است.  $\square$

لم ۲,۴. اگر  $a*b = a*c = 0$ ، آن‌گاه موارد زیر برقرارند:

$$\text{(الف)} \quad b*a = 0$$

$$\text{(ب)} \quad b*c \in \{0, b\}$$

$$\text{(پ)} \quad c*a = 0$$

$$\text{(ت)} \quad c*b \in \{0, c\}$$

$$\text{(ث)} \quad b*c = 0 \text{ نتیجه می دهد } c*b = 0$$

$$\text{(ج)} \quad b*c = b \text{ نتیجه می دهد } c*b = c$$

برهان. (الف) از آن جایی که  $a*b \neq a$ ، با استفاده از  $(p_{16})$  نتیجه می گیریم  $b*a \neq b$ . بنابر  $(p_{17})$ ،  $b*a \neq a$  همچنین از  $(p_{18})$  و  $a*c \neq a$  نتیجه می شود  $b*a \neq c$ . پس  $b*a = 0$ .

(ب) بنابر  $(p_{17})$ ،  $b*c \neq c$ ، با توجه به  $(p_{16})$  و  $a*c \neq a$  خواهیم داشت  $c*a \neq c$ . بنابر  $(p_{18})$  و  $c*a \neq c$  می توان نتیجه گرفت  $b*c \neq a$ . پس  $b*c \in \{0, b\}$ .

(پ) اثبات شبیه قسمت (الف) است.

(ت) اثبات شبیه قسمت (ب) است.

(ث) فرض کنید  $b * c = 0$ . در این صورت بنا بر  $(p_{17})$  و  $(p_{18})$ ،  $c * b \notin \{c, b\}$ . همچنین از  $(p_{18})$  و  $b * a \neq b$  خواهیم داشت  $c * b \neq a$ . پس  $c * b = 0$ .

(ج) با استفاده از  $(p_{15})$  برهان بدیهی است.  $\square$

لم ۳.۴. فرض کنید  $a * b = 0$  و  $a * c = a$ . در این صورت موارد زیر برقرارند:

$$(الف) \quad b * a \in \{0, c\}$$

$$(ب) \quad c * a = c$$

$$(پ) \quad c * b \in \{0, c\}$$

$$(ت) \quad \text{اگر } c * b = 0, \text{ آن گاه } b * c \in \{0, a\}$$

$$(ث) \quad \text{اگر } c * b = c, \text{ آن گاه } b * c = b$$

**برهان.** (الف) با استفاده از  $(p_{16})$ ،  $(p_{17})$  و  $a * b \neq a$  داریم  $b * a \notin \{a, b\}$ ؛ بنابراین  $b * a \in \{0, c\}$ .

(ب) طبق  $(p_{15})$  برهان بدیهی است.

(پ) بنا بر  $(p_{18})$  و  $b * a \neq b$  داریم  $c * b \neq a$ . به علاوه با استفاده از  $(p_{17})$  خواهیم داشت  $c * b \in \{0, c\}$ .

(ت) فرض کنید  $c * b = 0$ . در این صورت با استفاده از  $(p_{16})$ ،  $(p_{17})$  و  $c * b \neq c$  نتیجه می‌شود  $b * c \notin \{b, c\}$ . بنابراین  $b * c \in \{0, a\}$ .

(ث) بنا بر  $(p_{15})$  برهان بدیهی است.  $\square$

لم ۴.۴. فرض کنید  $a * b = 0$  و  $a * c = b$ . در این صورت موارد زیر برقرارند:

$$(الف) \quad b * a = 0$$

$$(ب) \quad b * c = b$$

$$(پ) \quad c * a = 0$$

$$(ت) \quad c * b = c$$

**برهان.** (ب) و (ت). با استفاده از  $(p_6)$  و  $a * c = b$  برهان ساده است.

(الف) بنا بر  $(p_{17})$ ،  $b * a \neq a$ ، با به کارگیری  $(p_{16})$  و  $a * b \neq a$  نتیجه می‌گیریم  $b * a \neq b$ . همچنین بنا بر  $(p_{18})$  و  $a * c \neq a$  خواهیم داشت  $b * a \neq c$ ؛ بنابراین  $b * a = 0$ .

(پ) بنا بر  $(p_{17})$ ،  $c * a \neq a$ ، با به کارگیری  $(p_{16})$  و  $a * c \neq a$  نتیجه می‌گیریم  $c * a \neq c$ . همچنین بنا بر  $(p_{18})$  و  $a * b \neq a$  خواهیم داشت  $c * a \neq c$ ؛ بنابراین  $c * a = 0$ . □

لم ۵.۴. فرض کنید  $a * b = a$  و  $a * c = 0$ . در این صورت

$$(الف) \quad b * a = b$$

$$(ب) \quad c * a \in \{0, b\}$$

$$(پ) \quad b * c \in \{0, b\}$$

$$(ت) \quad \text{اگر } b * c = 0, \text{ آن گاه } c * b \in \{0, a\}$$

$$(ث) \quad \text{اگر } b * c = b, \text{ آن گاه } c * b = c$$

برهان. (الف) بنا بر  $(p_{15})$  برهان بدیهی است.

(ب) با استفاده از  $(p_{16})$  و  $(p_{17})$ ، نتیجه می‌شود  $c * a \notin \{a, c\}$ . پس  $c * a \in \{0, b\}$ .

(پ) طبق (ب)  $c * a \neq c$ . به علاوه بنا بر  $(p_{17})$  و  $(p_{18})$  داریم  $b * c \notin \{a, c\}$ . پس  $b * c \in \{0, b\}$ .

(ت) فرض کنید  $b * c = 0$ . بنا بر  $(p_{16})$ ،  $(p_{17})$  و  $b * c \neq b$  نتیجه می‌شود  $c * b \notin \{b, c\}$ . پس  $c * b \in \{0, a\}$ .

(ث) با استفاده از  $(p_{15})$ ، برهان ساده است. □

لم ۶.۴. فرض کنید  $a * b = a * c = a$ . در این صورت

$$(الف) \quad b * a = b$$

$$(ب) \quad c * a = c$$

$$(پ) \quad \text{اگر } b * c = 0, \text{ آن گاه } c * b \in \{0, a\}$$

$$(ت) \quad \text{اگر } b * c = a, \text{ آن گاه } c * b \in \{0, a\}$$

$$(ث) \quad \text{اگر } b * c = b, \text{ آن گاه } c * b = c$$

برهان. (الف)، (ب) و (ث). با استفاده از  $(p_{15})$  برهان ساده است.

(پ) و (ت). فرض کنید  $b * c = 0$  یا  $b * c = a$ . با استفاده از  $(p_{16})$ ،  $(p_{17})$  و  $b * c \neq b$  نتیجه می‌شود  $c * b \notin \{b, c\}$  و لذا  $c * b \in \{0, a\}$ . □

لم ۷،۴. فرض کنید  $a * b = a$  و  $a * c = b$ . در این صورت

$$b * a = b \text{ (الف)}$$

$$b * c = b \text{ (ب)}$$

$$c * a \in \{0, b\} \text{ (پ)}$$

$$c * b = c \text{ (ت)}$$

برهان. (الف)، (ب) و (ت). با استفاده از  $(p_6)$  برهان ساده است.

(پ) از آنجایی که  $a * c \neq a$ ، با استفاده از  $(p_{16})$  و  $(p_{17})$  نتیجه می‌شود  $c * a \notin \{c, a\}$ ؛ بنابراین  $c * a \in \{0, b\}$ . □

لم ۸،۴. فرض کنید  $a * b = c$ . در این صورت

$$b * c = b \text{ (الف)}$$

$$c * b = c \text{ (ب)}$$

(پ) اگر  $a * c \in \{0, b\}$ ، آن‌گاه  $b * a = c * a = 0$

(ت) اگر  $a * c = a$ ، آن‌گاه  $b * a \in \{0, c\}$  و  $c * a = c$ .

برهان. (الف) و (ب). با به‌کارگیری  $(p_6)$  برهان ساده است.

(پ) فرض کنید  $a * c = 0$ . در این صورت بنا بر  $(p_{16})$ ،  $(p_{18})$  و  $a * c \neq a$  خواهیم داشت،  $c * a \neq a$  و  $b * a \neq c$  و  $c * a \neq c$ . هم‌چنین از  $(p_{16})$ ،  $(p_{18})$  و  $a * b \neq a$  نتیجه می‌شود  $c * a \neq b$  و  $b * a \neq b$ . با به‌کارگیری  $(p_{17})$ ، نتیجه می‌گیریم  $c * a = b * a = 0$ .

(ت) از  $a * c = a$  و  $(p_{15})$  نتیجه می‌گیریم  $c * a = c$ . از آنجایی که  $a * b \neq a$ ، بنا بر  $(p_{16})$  و  $(p_{17})$ ، داریم

$$b * a \notin \{b, a\} \text{؛ بنابراین } b * a \in \{0, c\}. \square$$

قضیه ۹.۴. هشت  $BI$ -جبر مرتبه ۴ در حد یکرختی موجود است.

برهان. فرض کنید  $X = \{0, a, b, c\}$  یک BI-جبر از مرتبه ۴ باشد. با استفاده از  $(p_{17})$ ،  $a * b \in \{0, a, c\}$ . اگر  $a * b = 0$ ، آن‌گاه سه حالت برای  $a * c$  داریم. اگر  $a * c = 0$ ، آن‌گاه بنابر لم ۲، ۴، دو BI-جبر زیر را می‌یابیم، که در آن هر دو متعدی هستند و  $(X, *_1)$  پخشی نیز است.

جدول ۵. BI-جبر متعدی و پخشی

$*_1$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	0	0	0
b	b	0	0	0
c	c	0	0	0

$I(X) = \{\{0\}, X\}$

جدول ۴. BI-جبر متعدی

$*_2$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	0	0	0
b	b	0	0	b
c	c	0	c	0

$I(X) = \{\{0\}, X\}$ . □

اگر  $a * b = 0$  و  $a * c = a$ ، آن‌گاه بنابر لم ۳.۴ (پ)،  $c * b = 0$  یا  $c * b = c$ . اگر  $c * b = 0$ ، آن‌گاه با استفاده از لم ۳.۴ (ت) باید چهار جدول زیر را مورد بررسی قرار دهیم. به‌سادگی دیده می‌شود  $(X, \bullet_1) \simeq (X, *_2)$  و  $(X, \bullet_2) \simeq (X, *_3)$  و  $(X, *_4)$  جابجایی، پخشی و متعدی است، ضمناً یک BCK-جبر نیز هست.

جدول ۷. BI-جبر متعدی

$\bullet_1$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	0	0	a
b	b	0	0	0
c	c	c	0	0

$I(X) = \{\{0\}, X\}$

جدول ۶. BI-جبر

$*_3$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	0	0	a
b	b	c	0	0
c	c	c	0	0

$I(X) = \{\{0\}, \{0, a\}, X\}$

جدول ۹. BI-جبر

$\bullet_2$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	0	0	a
b	b	0	0	a
c	c	c	0	0

$I(X) = \{\{0\}, \{0, c\}, X\}$

جدول ۸. BCK-جبر

$*_4$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	0	0	a
b	b	c	0	a
c	c	c	0	0

$I(X) = \{\{0\}, \{0, a\}, \{0, c\}, X\}$ . □

اگر  $c * b = c$ ، آن‌گاه بنابر لم ۳.۴ (ث)،  $b * c = b$  و باید دو جدول زیر را مورد بررسی قرار دهیم که هر دو غیر یکرخت، هر دو BI-جبر متعدی هستند و  $(X, *_5)$  پخشی است.

جدول ۱۱. BI-جبر متعدی و پخشی

$*_5$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	0	0	a
b	b	0	0	b
c	c	c	c	0

$I(X) = \{\{0\}, \{0, a, b\}, \{0, c\}, X\}$

جدول ۱۰. BI-جبر متعدی

$*_6$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	0	0	a
b	b	c	0	b
c	c	c	c	0

$I(X) = \{\{0\}, \{0, a\}, \{0, a, b\}, \{0, c\}, X\}$ . □

اگر  $a * b = 0$  و  $a * c = b$ ، آن‌گاه طبق لم ۴.۴ یک BI-جبر زیر را می‌یابیم که با  $(X, *_3)$  یکرخت است.

جدول ۱۲. BI-جبر

$\bullet_3$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	0	0	b
b	b	0	0	b
c	c	0	c	0

$I(X) = \{\{0\}, \{0, c\}, X\}$ . □

حال اگر  $a * b = a$  و  $a * c = 0$ ، آن‌گاه بنابر لم ۴،۵، شش BI-جبر زیر با جدول‌های کیلی که به صورت زیر نشان داده شده است را بررسی کنیم که همه جبرهای به دست آمده با حالت‌های قبلی که یافته‌ایم یکرخت هستند. با یک بررسی ساده ولی کمی طولانی متوجه می‌شویم که  $(X, \bullet_4) \cong (X, *_2)$ ،  $(X, \bullet_5) \cong (X, \bullet_6) \cong (X, *_3)$ ،  $(X, \bullet_7) \cong (X, *_4)$ ،  $(X, \bullet_8) \cong (X, *_5)$  و  $(X, \bullet_9) \cong (X, *_6)$ . برای مثال اگر  $f: (X, \bullet_9) \rightarrow (X, *_6)$  را به صورت

$$f(0) = 0, f(a) = a, f(b) = c, f(c) = b$$

تعریف کنیم. در این صورت  $f$  یک یکرختی بین  $(X, \bullet_9)$  و  $(X, *_6)$  است. اثبات یکرختی بقیه موارد نیز مشابه است و در این مقاله به آن نپرداخته‌ایم.

جدول ۱۴. BI-جبر متعدی

$\bullet_4$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	0	a	0
b	b	b	0	0
c	c	0	0	0

$I(X) = \{\{0\}, X\}$

جدول ۱۳. BI-جبر

$\bullet_5$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	0	a	0
b	b	b	0	0
c	c	0	a	0

$I(X) = \{\{0\}, \{0, b\}, X\}$

جدول ۱۶. BI-جبر

$\bullet_6$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	0	a	0
b	b	b	0	0
c	c	b	0	0

$I(X) = \{\{0\}, \{0, a\}, X\}$

جدول ۱۵. BCK-جبر

$\bullet_7$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	0	a	0
b	b	b	0	0
c	c	b	a	0

$I(X) = \{\{0\}, \{0, a\}, \{0, b\}, X\}$

جدول ۱۸. BI-جبر متعددی و پخشی

$\bullet_8$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	0	a	0
b	b	b	0	b
c	c	0	c	0

$$I(X) = \{ \{0\}, \{0, a, c\}, \{0, b\}, X \}$$

جدول ۱۷. BI-جبر متعددی

$\bullet_9$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	0	a	0
b	b	b	0	b
c	c	b	c	0

$$I(X) = \{ \{0\}, \{0, a\}, \{0, b\}, \{0, a, c\}, X \}. \square$$

اگر  $a * b = a * c = a$ ، آن‌گاه طبق لم ۶.۴، پنج BI-جبر زیر را می‌یابیم که  $(X, *_7)$  متعددی است،  $(X, *_8)$  جابجایی و پخشی و یک BCK-جبر است. همچنین  $(X, *_5) \simeq (X, *_6)$  و  $(X, *_5) \simeq (X, *_6)$ .

جدول ۲۰. BI-جبر متعددی و پخشی

$\bullet_{10}$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	0	a	a
b	b	b	0	0
c	c	c	0	0

$$I(X) = \{ \{0\}, \{0, a\}, \{0, b, c\}, X \}$$

جدول ۱۹. BI-جبر متعددی

$\bullet_{11}$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	0	a	a
b	b	b	0	0
c	c	c	a	0

$$I(X) = \{ \{0\}, \{0, a\}, \{0, b\}, \{0, b, c\}, X \}$$

جدول ۲۲. BI-جبر متعددی

$\bullet_{12}$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	0	a	a
b	b	b	0	a
c	c	c	0	0

$$I(X) = \{ \{0\}, \{0, a\}, \{0, b, c\}, \{0, c\}, X \}$$

جدول ۲۱. BI-جبر متعددی

$*_7$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	0	a	a
b	b	b	0	a
c	c	c	a	0

$$I(X) = \{ \{0\}, \{0, a\}, \{0, b\}, \{0, c\}, \{0, b, c\}, X \}$$

جدول ۲۳. BCK-جبر

$*_8$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	0	a	a
b	b	b	0	b
c	c	c	c	0

$$I(X) = \{\{0\}, \{0, a\}, \{0, b\}, \{0, c\}, \{0, a, b\}, \{0, a, c\}, \{0, b, c\}, X\}.$$

اگر  $a * b = a$  و  $a * c = b$ ، آن گاه با استفاده از لم ۷،۴ به دو BI-جبر زیر می رسیم، که در آن  $(X, \bullet_{13}) \simeq (X, *_6)$  و  $(X, \bullet_{14}) \simeq (X, *_7)$ .

جدول ۲۵. BI-جبر متعدی

$\bullet_{13}$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	0	a	b
b	b	b	0	b
c	c	0	c	0

$$I(X) = \{\{0\}, \{0, a, c\}, \{0, b\}, \{0, c\}, X\}$$

جدول ۲۴. BI-جبر متعدی

$\bullet_{14}$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	0	a	b
b	b	b	0	b
c	c	b	c	0

$$I(X) = \{\{0\}, \{0, a\}, \{0, b\}, \{0, c\}, \{0, a, c\}, X\}.$$

در پایان، اگر  $a * b = c$ ، آن گاه بنا بر لم ۸،۴ باید چهار جدول زیر را مورد بررسی قرار دهیم که همه آنها با موارد قبلی که یافته ایم یکرخت هستند. داریم  $(X, \bullet_{15}) \simeq (X, *_3)$ ،  $(X, \bullet_{16}) \simeq (X, *_4)$ ،  $(X, \bullet_{17}) \simeq (X, *_6)$  و  $(X, \bullet_{18}) \simeq (X, *_7)$ .

جدول ۲۶. BCK-جبر

$\bullet_{16}$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	0	c	b
b	b	0	0	b
c	c	0	c	0

$$I(X) = \{\{0\}, \{0, b\}, \{0, c\}, X\}$$

جدول ۲۷. BI-جبر

$\bullet_{15}$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	0	c	0
b	b	0	0	b
c	c	0	c	0

$$I(X) = \{\{0\}, \{0, b\}, X\}$$

جدول ۲۹. BI-جبر متعدی

$\bullet_{17}$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	0	c	a
b	b	0	0	b
c	c	c	c	0

$$I(X) = \{\{0\}, \{0, a\}, \{0, a, b\}, \{0, b\}, \{0, c\}, X\}$$

جدول ۲۸. BI-جبر متعدی

$\bullet_{18}$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	0	c	a
b	b	c	0	b
c	c	c	c	0

$$I(X) = \{\{0\}, \{0, a\}, \{0, a, b\}, \{0, b\}, \{0, c\}, X\}. \square$$

با توجه به BI-جبرهای  $(X, *_1)$  تا  $(X, *_8)$  به نتیجه زیر می‌رسیم:

نتیجه ۱۰.۴ الف- تعداد BI-جبرهای از مرتبه ۴ در حد یکریختی برابر ۸ است،

قضیه ۱۱.۴ هر BI-جبر جابجایی و پخشی یک BCK-جبر است.

برهان. فرض کنیم  $X$  یک BI-جبر جابجایی و پخشی باشد. طبق قضیه ۸.۲، هر BI-جبر جابجایی و پخشی یک

دوگان جبر هیلبرت جابجایی است. پس طبق تعریف ۶.۲ و قضیه ۷.۲ در خواص  $(BCK_2)$  تا  $(BCK_4)$  صدق می‌کند.

بنابر قضیه ۳.۲  $(p_{11})$  و قضیه ۷.۲ الف)، برای هر  $x, y, z \in X$  داریم:

$$0 = ((x * y) * (z * y)) * (x * z) = ((x * y) * (x * z)) * (z * y).$$

بنابراین  $X$  در شرط  $(BCK_1)$  نیز صدق می‌کند و در نتیجه یک BCK-جبر است.  $\square$

قضیه ۱۲.۴ BCK-جبر  $X$  یک BI-جبر است اگر و تنها اگر استلزامی باشد.

در مثال بعد نشان می‌دهیم عکس قضیه ۱۱.۴، در حالت کلی برقرار نیست.

مثال ۱۳.۴. فرض کنید  $X = \{0, a, b, c\}$ . در جدول کیلی زیر مشاهده می‌کنیم که  $(X, \bullet)$  یک  $BCK$ -جبر است ولی یک  $BI$ -جبر نیست، زیرا  $a \bullet (b \bullet a) = a \bullet a = 0 \neq a$  و در شرط  $(BI)$  صدق نمی‌کند.

جدول ۲۰.  $BCK$ -جبر

$\bullet$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	0	0	0
b	b	a	0	a
c	c	a	a	0

## ۵. نتیجه گیری

در این مقاله  $BI$ -جبرهای از مرتبه ۲، ۳ و ۴ در حد یکرخیته رده‌بندی شدند. نتایج اصلی شامل موارد زیر است:

$BI$ -جبرهای مرتبه ۲: طبق قضیه ۱،۳، تنها یک  $BI$ -جبر از مرتبه ۲ وجود دارد.

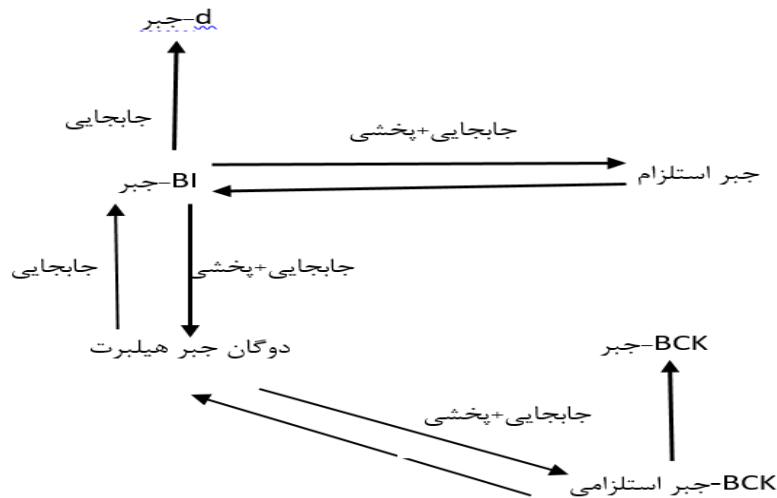
$BI$ -جبرهای مرتبه ۳: طبق قضیه ۲،۳، دو  $BI$ -جبر از مرتبه ۳ شناسایی شد.

$BI$ -جبرهای مرتبه ۴: تعداد  $BI$ -جبرهای از مرتبه ۴ در حد یکرخیته به ۸ می‌رسد که در فصل سوم اثبات شده است.

برای تمامی  $BI$ -جبرهای معرفی شده، مجموعه تمام ایده‌آل‌ها به نمایش گذاشته شده و مشخص گردیده کدام یک دارای خواص جابجایی، پخشی و متعدی هستند. به‌طور خاص، ثابت شده است که هر  $BI$ -جبر جابجایی و پخشی یک  $BCK$ -جبر است. نتایج این تحقیق با استفاده از قضایای ۱.۳، ۲.۳ و نتیجه ۱۰.۴ در جدول (۱) و شکل (۱) نتایج ارائه شده اند. نتایج این تحقیق نشان می‌دهد با افزایش مرتبه، تنوع و پیچیدگی  $BI$ -جبرها به طور قابل توجهی افزایش می‌یابد. در تحقیقات بعدی به رده‌بندی  $BI$ -جبرهای مرتبه ۵ خواهیم پرداخت که به فهم عمیق‌تر از ساختارها کمک می‌کند.

جدول ۱: تعداد انواع BI-جبرهای از مرتبه کمتر از ۵

مرتبه BI-جبر	تعداد	جابجایی	پخشی	BCK-جبر	متعدی
۲	۱	۱	۱	۱	۱
۳	۲	۱	۲	۱	۱
۴	۸	۲	۴	۲	۷



شکل ۱. ارتباط بین ساختارهای جبری در این مقاله

### References

1. J. Abbott, Semi-Boolean algebras, *Mate. Vesnik*, **4**(1967), 177-198.
2. S. S. Ahn, J. M. Ko and A. Borumand Saeid, On ideals of BI-algebras, *J. Indones. Math. Soc.* **25**(1)(2019), 24-34.
3. R. Ameri, A. Radfar and R. A. Borzooei, Characterization of hyper BCI-algebra of order 3, *Ital. J. Pure Appl. Math.* **30**(2013), 141-156.
4. A. Borumand Saeid, H. S. Kim and A. Rezaei, On BI-algebras, *An. St. Univ. Ovidius Constanta* **25**(2017), 177-194.

5. R. A. Borzooei and S. Khosravi shoar, Implication algebras are equivalent to the dual implicative BCK-algebras ,Sci. Math. Jpn. **63**(2006), 371-373.
6. R. A. Borzooei and A. Radfar, Classification of hyper MV-algebras of order 3, Ratio Mathematica. **25**(2013), 15-28.
7. A. Diego, Sur algèbres de Hilbert, Collect. Logique Math. Ser. A **21** (1967), 177–198.
8. .L. QHu and X. Li, On BCH-algebra, Math. Sem. Notes Kobe Univ. **2** (1983), part 2, 313-320.
9. Y. Imai and K. Iseki, On axioms systems of propositional calculi XIV, Proceeding of the Japan Academy, Series A, **42** (1966), 19–22.
10. H. S. Kim and Y. H. Kim, On BE-algebras, Sci. Math. Jpn, **66**(1) (2007), 113-117.
11. H. S. Li, An axiom system of BCI-algebras, Math. Jpn, **30** (1985), 351–352.
12. J. Neggers and H. S. Kim, On d-algebras, Math. Slovaca, **49** (1999), 19-26.
13. S. A. Nematollah Zadeh, A. Broumand Saeid, R. Ameri and A. Radfar, On finite B-algebra, Afrika Matematika, **26**(2015), 825-847, DOI 10.1007/s13370-014-0249-8.
14. S. A. Nematolah Zadeh, A. Borumand Saeid, R. A. Borzooei, A. Radfar and R. Ameri, On finite BM-algebra, Kochi J. Math **9** (2014): 43-50.
15. S. Niazian, On hyper BI-algebras, Journal of Algebraic Hyperstructures and Logical Algebras, **2**(1) (2021), 47-67.
16. A. Radfar and A. Rezaei, ,Pseudo-BI-algebras: Non-commutative generalization of BI-algebras Journal of Algebraic Hyperstructures and Logical Algebras**4**(2)(2023), 167-187.
17. S. Rasouli, A new approach to characterization of MV-algebras , Algebraic Structures and Their Applications, **3**(2016), 49-70.
18. S. Soleymani, Topics in BI-algebras, (2022), Ph. D. Thesis, Payame Noor University, Iran.
19. K. Shuker, and H. Ahmed, The Characterizations of  $\delta$ -Algebras with Their Ideals, (2021), Journal of Physics: Conference Series. 1999. 012108. 10.1088/1742-6596/1999/1/012108.