Mathematical Researches
Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554
Homepage: https://jemr.khu.ac.ir/
Kharazmi University

State n-Fold Obstinate Ideals in State MV-Algebras

F. Forouzesh[1], **M. Salarbadeh**[2], **A. Darijani**[3]

1. Corresponding Author, Department of Mathematics, Higher Education Complex of Bam, Kerman, Iran. E-mail: frouzesh@bam.ac.ir
2. Department of Mathematics, Shahid Bahonar university, Kerman, Iran. E-mail: fmohamadf5395@gmail.com
3. Department of Mathematics, Higher Education Complex of Bam, Kerman, Iran. E-mail: a.darijan@bam.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 28 July 2023
Received in revised form: 3 July 2024
Accepted: 7 July 2024
Published online: 10 November 2024

Keywords:
State ideals
(state n-fold obstinate, state n-fold Boolean)
State locally finitie,
Semi-simple.

ABSTRACT

Introduction

States on MV -algebras were introduced by Mundici with the intent of measuring the average truth-value of propositions in the Lukasiewicz logic, which are generalizations of probability measures on Boolean algebras, states on MV -algebras have been deeply investigated by Flaminio and Montagna. The last decade, some concepts of state ideals in a state MV –algebra are introduced such as: state Boolean ideals, state primary ideals and state obstinate ideals in a state MV –algebra and give some of their properties.
In this paper, some types of state ideals are introduced such as: state n-fold obstinate and state n-fold Boolean ideals in state MV-algebras. Then we investigate the relationship between state n-fold obstinate ideals with the other state ideals in state MV-algebras.
Finally, we study quotient algebras induced by state n-fold obstinate ideals in state MV-algebras.

Conclusion

The following conclusions are obtained from this research.

- We introduced state n-fold obstinate ideals and state n-fold Boolean ideals in state MV-algebras.
- We studied the relationship between state n-fold obstinate ideals with the other state ideals in state MV-algebras.
- We investigate quotient algebras induced by state n-fold obstinate ideals in state MV-algebras.

How to cite: Forouzesh, F., Salarbadeh, M., & Darijani, A. (2024). State n-Fold Obstinate Ideals in State MV-Algebras. *Mathematical Researches*, **10** (3), 100 – 122.

Publisher: Kharazmi University

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

ایده‌آل‌های سرسخت n–لایه حالت در MV–جبرهای حالت

فرشته فروزش[1]✉، محمد سالارباده[2]، علی دریجانی[3]

۱. نویسنده مسئول، گروه ریاضی، دانشکده ریاضیات و محاسبات نرم، مجتمع آموزش عالی بم، کرمان، ایران. رایانامه: frouzesh@bam.ac.ir
۲. فارغ التحصیل ارشد، دانشکده ریاضی، شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران. رایانامه: fmohamadf5395@gmail.com
۳. گروه ریاضی، دانشکده ریاضیات و محاسبات نرم، مجتمع آموزش عالی بم، کرمان، ایران. رایانامه: a.darijani@bam.ac.ir

اطلاعات مقاله	چکیده
نوع مقاله: مقاله پژوهشی	در این مقاله، برخی از انواع ایده آلهای حالت مانند: ایده آلهای حالت سرسخت n-لایه و ایده آلهای حالت بولی n-لایه را در MV-جبرهای حالت معرفی می‌کنیم و سپس به بررسی رابطه میان ایده آلهای حالت سرسخت n-لایه با سایر ایده آلهای حالت در یک MV-جبر حالت می پردازیم. در پایان، جبرهای خارج قسمتی القایی توسط ایده آلهای حالت سرسخت n-لایه را مورد مطالعه قرار می دهیم.

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۵/۰۶
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۴/۱۳
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۴/۱۷
تاریخ انتشار: ۱۴۰۳/۸/۲۰

واژه‌های کلیدی:
ایده الهای حالت (n-لایه سرسخت ، n-لایه بولی)،
حالت موضعا متناهی،
نیمه ساده،

استناد: فروزش، فرشته؛ سالارباده، محمد؛ و دریجانی، علی (۱۴۰۳). ایده‌آل‌های سرسخت n-لایه حالت در MV-جبرهای حالت. *پژوهش‌های ریاضی*، **۱۰** (۳)، ۱۰۰ – ۱۲۲.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

مقدمه

اولین بار MV-جبرها، بوسیله چانگ[1] در سال ۱۹۵۸ معرفی شدند [4]. در واقع آنها یک ساختار جبری از منطق بینهایت ارزشی لوکاسویچ[2] هستند و نظریه آنها بعد از سال ۱۹۸۶ توسعه داده شد[4]. همچنین ماندیسی[3] نشان داد یک هم ارزی رسته ای بین رسته MV-جبرها و رسته l-گروههای آبلی با یکه قوی وجود دارد، این رسته از جبرها توسط بسیاری از محققان مورد مطالعه قرار گرفت[21] .

نظریه ایده آلها یک نقش اصلی در MV-جبرها بازی می‌کند و برای مشخص کردن MV-جبرها مفید است. پس از آن، معتمد [4]و برومند[5] فیلترهای سرسخت n-لایه در BL-جبرها را معرفی کردند [19]. فروزش[6] و دیگران نیز ایده‌آلهای سرسخت در MV-جبرها را معرفی کردند و رابطه میان آنها با سایر ایده آلها را بررسی کردند [12].

40 سال بعد از بوجود آمدن MV-جبرها، حالتها روی MV-جبرها بوسیله ماندیسی مطرح شدند و در جهت اندازه میانگین ارزش درستی گزاره‌ها در منطق لوکاسویچ، که تعمیم اندازه احتمال روی جبرهای بولی هستند مورد استفاده قرار گرفتند[20].

در دهه آخر، نظریه حالتها روی MV-جبرها و ساختارهای نسبی آنها توسط بسیاری از محققان مانند: کهر[7] و ماندیسی[18] ، کروپا[8] [17]، دوارنسکی[9] و راچانک[10] [9]، جور جسکیو [11] [15]، و دیگران مورد مطالعه قرار گرفتند. حالتها روی MV-جبرها، توسط فلامینو[12] و مونتاگنا[13] عمیقاً مورد بررسی قرار گرفتند[13] و [14]. همچنین، آن ها یک عمل یکتایی σ روی MV-جبرها تعریف کردند که خواص عادی حالتها را حفظ می‌کند.

سینگیو[14] مفهوم BL-جبر حالت را به عنوان تعمیمی از مفهوم یک MV-جبر حالت معرفی کرد[6] به همین ترتیب، مفهوم تعمیم یافته آن توسط دوارنسکی ارائه شد[9] دوارنسکی، به طور غیر مستقم توصیف کاملی از همریختی BL-جبرهای ریختار حالت ارائه داد که سرانجام به یک نتیجه مشابه از دی نولا [15]و دوارنسکی تعمیم داده شد [7] و دی نولا آن را ادامه داد [8] . پس از آن باتر[16] و دوارنسکی توصیفی کاملاً غیر مستقیم از BL-جبرهای حالت ساده نشدنی ثابت مطرح کرده و نظریهای جامع از جبرهای ریختار حالت ارائه دادند [3] .

در این مقاله، مفاهیم ایده آلهای حالت مانند: ایده آل های حالت بولی n-لایه و ایده آلهای حالت سرسخت n-لایه را در یک MV-جبر حالت (A,σ) تعریف کرده و قضایای مربوطه را ارائه داده ایم. همچنین، توصیفی از ایده آلهای حالت سرسخت n-لایه و ایده آلهای حالت بولی n-لایه ارائه داده و روابط میان ایده آلهای حالت سرسخت n-لایه با سایر ایده آلها

[1] C. C. Chang
[2] Lukasiewicz
[3] D. Mundici
[4] S. Motamed
[5] A. Borumand
[6] F. Forouzesh
[7] J. Kuher
[8] A. Kroupa
[9] A. Dvurečenskij
[10] J. Rachuneki
[11] G. Georgescu
[12] T. Flaminio
[13] F. Montagna
[14] L. C. Ciungu
[15] A. Di Nola
[16] M. Botur

در یک MV-جبر حالت (A,σ) را بررسی کرده ایم. در ادامه، نشان می‌دهیم اگر I یک ایده آل حالت سرسخت n-لایه از (A,σ) باشد، آنگاه $(A/I,\overline{\sigma})$ یک MV-جبر حالت موضعاً متناهی است.

۱. پیشنیازها

در این بخش، به مطالعه برخی از تعاریف و قضایای مورد نیاز در این مقاله می پردازیم.

تعریف ۱,۱ *[5] اگر $L=(L,\wedge,\vee,۰,۱)$ یک مشبکه کراندار باشد، یک عضو $a\in L$ را متممدار گوییم، اگر یک $b\in L$ موجود باشد بطوریکه دو شرط $a\vee b=۱$ و $a\wedge b=۰$.*

مجموعه همه عضوهای متممدار L را با $B(L)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۲,۱ *[2] جبر $(L,\wedge,\vee,*,۰,۱)$ از نوع $(۲,۲,۱,۰,۰)$ یک جبر بولی است، اگر $(L,\wedge,\vee)$ یک مشبکه باشد. به قسمی که برای هر $x,y,z\in L$ دارای خواص زیر باشد:*

(۱) $x\vee 1=1\ ,\ x\wedge 0=0$;

(۲) $x\wedge x^*=0\ ,\ x\vee x^*=1$;

(۳) $x\vee(y\wedge z)=(x\vee y)\wedge(x\vee z)\ ,\ x\wedge(y\vee z)=(x\wedge y)\vee(x\wedge z)$.

تعریف ۳,۱ *[4] جبر $(A,\oplus,*,۰)$ از نوع $(۲,۱,۰)$ یک MV-جبر است، اگر در شرایط زیر صدق کند:*

$(MV1)$ $(A,\oplus,0)$ یک تکواره آبلی است.

$(MV2)$ $(a^*)^*=a$.

$(MV3)$ $0^*\oplus a=0^*$;

$(MV4)$ $(a^*\oplus b)^*\oplus b=(b^*\oplus a)^*\oplus a$.

ثابت ۱ و عملهای کمکی $\ominus$، $\odot$، $\wedge$ و $\vee$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

(۱) $a\odot b=(a^*\oplus b^*)^*$؛

(۲) $a\ominus b=a\odot b^*$؛

(۳) $۰^*=۱$؛

(۴) $a\wedge b=a\odot(b\oplus a^*)$ و $a\vee b=a\oplus(b\odot a^*)$.

که از اینرو $(A,\wedge,\vee)$ یک مشبکه توزیع پذیر با ۰ و ۱ می شود که $B(L(A))$ عناصر متمم دار $L(A)$ می باشند که با $B(A)$ نیز نمایش می دهند.

در ادامه، در سرتاسر مقاله، منظور از A، یک MV-جبر است.

تعریف ۴,۱ *[5] یک عضو $x \in A$ دارای مرتبه n است، اگر n کوچکترین عدد طبیعی*

(در صورت وجود) باشد به قسمی که $nx = 1$ (جاییکه $nx = x \oplus x \oplus \cdots \oplus x$) و آن را به صورت $ord(x) = n$ نشان می‌دهیم. در این حالت گوییم x دارای مرتبه متناهی است و می‌نویسیم $ord(x) < \infty$.

یک MV-جبر A را موضعاً متناهی گوییم، هرگاه هر عضو ناصفرش دارای مرتبه متناهی باشد.

لم ۵,۱ *[5] برای هر $x, y \in A$ شرایط زیر معادلند:*

(۱) $x^* \oplus y = 1$;

(۲) $x \odot y^* = 0$;

(۳) یک عضو $z \in A$ وجود دارد بطوریکه $x \oplus z = y$;

(۴) $y = x \oplus (y \ominus x)$.

تعریف ۶,۱ *[5] برای هر $x, y \in A$، $x \le y$ اگر و تنها اگر y و x در یکی از شرایط معادل (۴) − (۱) در لم بالا صدق کنند.*

تعریف ۷,۱ *[5] برای هر $x, y \in A$ تابع فاصله چانگ، در یک MV-جبر به صورت زیر است:*

$$d: A \times A \longrightarrow A \quad , \quad d(x,y) = (x \odot y^*) \oplus (y \odot x^*).$$

لم ۸,۱ *[5] برای $x, y, z \in A$ خواص زیر برقرار است:*

(۱) $x \le y$ اگر و تنها اگر $y^* \le x^*$;

(۲) اگر $x \le y$، آنگاه $x \oplus z \le y \oplus z$ و $x \odot z \le y \odot z$;

(۳) $x, y \le x \oplus y$ و $x \odot y \le x, y$ و $x \le nx$ و $x^n = x \odot x \odot \ldots\ldots \odot x \le x$;

(۴) $x \oplus x^* = 1$ و $x \odot x^* = 0$;

(۵) اگر $x \in B(A)$، آنگاه برای هر $y \in A$، $x \vee y = x \oplus y$, $x \wedge y = x \odot y$;

(۶) $x \odot y \le z$ اگر و تنها اگر $x \le y^* \oplus z$;

(۷) اگر $x \leq y$ و $z \leq t$، آنگاه $x \oplus z \leq y \oplus t$.

تعریف ۹,۱ *[5] یک زیرمجموعه ناتهی I یک ایده ال از A گوییم هرگاه*

(۱) اگر $x \in I$ و $y \in A$ و $y \leq x$، آنگاه $y \in I$.

(۲) اگر $x, y \in I$، آنگاه $x \oplus y \in I$.

تعریف ۱۰,۱ *[5] فرض کنید A و B دو MV-جبر باشند. تابع $f: A \to B$ را MV-همریختی گوییم اگر*

(۱) $f(0) = 0$.

(۲) $f(x \oplus y) = f(x) \oplus f(y)$.

(۳) $f(x^*) = f(x)^*$.

تعریف ۱۱,۱ *[5] فرض کنید I یک ایده آل از A است. رابطه همنهشتی $\sim_I$ را روی A به صورت زیر تعریف می‌کنیم :*

$$x \sim_I y \Leftrightarrow d(x, y) \in I.$$

مجموعه رده های همنهشتی A را با A/I نمایش می‌دهیم که برابر است با

$$A/I = \{x/I: x \in A\},$$

بطوریکه $x/I = \{y \in A: x \sim_I y\}$ است.

ملاحظه ۱۲,۱ *[5] در تعریف قبل، به آسانی می‌توان نتیجه گرفت:*

$$x \in I \Leftrightarrow x/I = 0/I$$

و $(A/I, \oplus, *, 0)$ با عملهای

$$x/I \oplus y/I = (x \oplus y)/I \quad \text{و} \quad (x/I)^* = x^*/I$$

یک MV-جبر است.

در این حالت روابط زیر برقرار است:

$$x/I = y/I \quad \text{اگر تنها و اگر} \quad d(x, y) \in I$$

همچنین برای هر $x, y \in A$ داریم:

$x/I \leq y/I$ اگر تنها و اگر $x \odot y^* \in I$.

تعریف ۱٫۱۳ *[11] اگر I یک ایده آل سره از A باشد، در این صورت اشتراک همه ایده آلهای ماکسیمال A شامل I را رادیکال I تعریف می‌کنند و آن را با $Rad(I)$ نمایش می‌دهند.*

قضیه ۱٫۱۴ *[11] اگر I یک ایده آل سره از A باشد، نتیجه می‌شود:*

$$Rad(I) = \{a \in A : na \odot a \in I, \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

تعریف ۱٫۱۵ *[1] MV-جبر A را نیمه ساده گویند، اگر و تنها اگر غیر بدیهی باشد و $Rad(A) = \{0\}$.*

تعریف ۱٫۱۶ *[5] یک MV-جبر A را ساده می‌گویند، اگر A غیر بدیهی باشد و $\{0\}$ تنها ایده آل سره آن باشد.*

تعریف ۱٫۱۷ *[12] ایده‌آل سره I از A را سرسخت گویند، هرگاه برای هر $x, y \in A - I$*

$$x \odot y^* \in I \quad \text{و} \quad y \odot x^* \in I$$

تعریف ۱٫۱۸ *[13] یک MV-جبر حالت یک جفت (A, σ) است بطوریکه A یک MV-جبر است و $\sigma : A \longrightarrow A$* یک عمل یکتایی به روی A است به طوری که برای هر $x, y \in A$ در شرایط زیر صدق می‌کند:

(۱) $\sigma(1) = 1$;

(۲) $\sigma(x^*) = \sigma(x)^*$;

(۳) $\sigma(x \oplus y) = \sigma(x) \oplus \sigma(y \ominus (x \odot y))$;

(۴) $\sigma(\sigma(x) \oplus \sigma(y)) = \sigma(x) \oplus \sigma(y)$.

لم ۱٫۱۹ *[13] در یک MV-جبر حالت (A, σ)، برای هر x و $y \in A$ ویژگیهای زیر برقرار است:*

(a) $\sigma(0) = 0$;

(b) اگر $x \leq y$، آنگاه $\sigma(x) \leq \sigma(y)$;

(c) $\sigma(x \oplus y) \leq \sigma(x) \oplus \sigma(y)$ و اگر $y \leq x$، آنگاه $\sigma(x \oplus y) = \sigma(x) \oplus \sigma(y)$;

(d) $\sigma(x \ominus y) \geq \sigma(x) \ominus \sigma(y)$ و اگر $y \leq x$، آنگاه $\sigma(x \ominus y) = \sigma(x) \ominus \sigma(y)$;

(e) می‌دانیم $d(x, y) = (x \ominus y) \oplus (y \ominus x)$ در نتیجه داریم

$d(\sigma(x), \sigma(y)) \leq \sigma(d(x, y))$;

(f) $\sigma(x) \odot \sigma(y) \leq \sigma(x \odot y)$. بنابراین اگر $x \odot y = 0$، آنگاه $\sigma(x) \odot \sigma(y) = 0$;

(g) $\sigma(\sigma(x)) = \sigma(x)$;

(h) $\sigma\big(\sigma(x) \odot \sigma(y)\big) = \sigma(x) \odot \sigma(y)$;

(i) تصویر $\sigma(A)$ از A تحت σ، یک زیر MV-جبر از A است.

تعریف ۲۰،۱ *[13] یک σ-ایده آل (ایده آل حالت) از یک MV-جبر حالت (A,σ)، یک MV-ایده آل بسته تحت σ است. به عبارت دیگر $\sigma(I) \subseteq I$ است.*

مجموعهی σ-ایده آلهای (A,σ) را با $I_\sigma(A)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۲۱،۱ *[13] یک ایده آل حالت سره از (A,σ) یک ایده آل حالت ماکسیمال نامیده میشود اگر به طور سره شامل هیچ ایده آل حالت سره‌ای از (A,σ) نباشد.*

لم ۲۲،۱ *[13] یک ایده آل حالت I یک ایده آل حالت ماکسیمال است اگر و تنها اگر برای هر $a \notin I$، عدد صحیح $n > ۰$ وجود داشته باشد. بطوریکه:*

$$(n\sigma(a))^* = \sigma(a^*)^n \in I.$$

لم ۲۳،۱ *[13] فرض کنید (A,σ) یک MV-جبر حالت باشد و I یک ایده آل حالت از A باشد و $a \notin I$. آنگاه* مجموعه

$$(I,a]_\sigma = \{x \in A: x \leq i \oplus n(a \oplus \sigma(a)), i \in I, n \geq 1\}.$$

یک ایده ال حالت است که به آن ایده ال حالت تولید شده توسط I و a می گوییم. در حالت خاص،

$$(a]_\sigma = \{x \in A: x \leq n(a \oplus \sigma(a)), n \geq 1\}.$$

گزاره ۲۴،۱ *[13] اگر I یک ایده آل حالت از (A,σ) باشد، آنگاه $\sigma(I)$ یک ایده آل روی $\sigma(A)$ است و $\sigma(I) = I \cap \sigma(A)$.*

گزاره ۲۵،۱ *[13] اگر I یک ایده آل از $\sigma(A)$ باشد، آنگاه $\sigma^{-۱}(I)$ یک ایده‌آل حالت از A است.*

تعریف ۲۶،۱ *[10] یک ایده آل حالت I از (A,σ) یک ایده آل حالت بولی از (A,σ) نامیده می‌شود، اگر*

$$(x \oplus \sigma(x)) \wedge (x^* \oplus \sigma(x^*)) \in I.$$

تعریف ۲۷،۱ *[10] یک MV-جبر حالت (A,σ) یک جبر حالت بولی نامیده می‌شود اگر برای هر $x, y \in A$،*

$$\sigma(x) \vee \sigma(x^*) = 1 \qquad \text{یا} \qquad \sigma(x) \wedge \sigma(x^*) = 0$$

تعریف ۲۸,۱ *[10] فرض کنید P یک ایده ال حالت سره از (A,σ) باشد. P را یک ایده ال حالت اول گوییم اگر برای هر دو عضو $a,b \in A$، $(a \oplus \sigma(a)) \wedge (b \oplus \sigma(b)) \in P$ نتیجه شود $a \in P$ یا $b \in P$.*

تعریف ۲۹,۱ *[10] یک MV-جبر حالت (A,σ)، حالت موضعاً متناهی نامیده می‌شود، اگر برای هر عضو غیر صفر $a \in A$، $\sigma(a)$ دارای مرتبه متناهی باشد.*

قضیه ۳۰,۱ *[10] M یک ایده آل حالت ماکسیمال از (A,σ) است اگر و تنها اگر $(A/M,\overline{\sigma})$ حالت موضعاً متناهی باشد.*

تعریف ۳۱,۱ [20] *یک σ-ایده آل سره I از (A,σ) یک ایده آل حالت اولیه نامیده می‌شود، اگر برای هر $a,b \in A$ که $a \odot b \in I$، یک $n \geq ۱$ وجود داشته باشد بطوریکه:*

$$\sigma(a)^n \in I \quad \text{یا} \quad \sigma(b)^n \in I$$

۲. ایده آلهای حالت سرسخت n-لایه در MV-جبرهای حالت

تعریف ۲,۱ *فرض کنید I یک ایده آل سره حالت از (A,σ) باشد. I را یک ایده آل حالت سرسخت n-لایه از (A,σ) نامند، اگر در شرایط زیر صدق کند:*

$$\forall x,y \in A: x,y \notin I \Longrightarrow \sigma(nx)^* \odot \sigma(y) \in I \quad \text{و} \quad \sigma(x) \odot \sigma(ny)^* \in I.$$

در حالت خاص، ایده آلهای حالت سرسخت ۱-لایه، ایده آلهای حالت سرسخت هستند.

مثال ۲,۲ *فرض کنید $A = \{۰, a, b, ۱\}$ با $۰ < a,b < ۱$ باشد. همچنین عملهای $\odot$، $\oplus$ و $*$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:*

$\oplus$	0	a	b	1
0	0	a	b	1
a	a	a	1	1
b	b	1	b	1
1	1	1	1	1

$\odot$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	0	a
b	0	0	b	b
1	0	a	b	1

$*$	0	a	b	1
	1	b	a	0

در این صورت $(A,\oplus,\odot,*,0,1)$ یک MV-جبر است [16] .

(i) تعریف می‌کنیم:

$$\sigma(x)=\begin{cases}1 & \text{اگر}\ x=1\\ b & \text{اگر}\ x=\mathrm{a}\\ a & \text{اگر}\ x=\mathrm{b}\\ 0 & \text{اگر}\ x=0\end{cases}$$

به آسانی می‌توان ثابت کرد که (A,σ) یک MV-جبر حالت است [10] .

(ii) تعریف می‌کنیم:

$$\sigma(x)=\begin{cases}1 & \text{اگر}\ x=1,\mathrm{a}\\ 0 & \text{اگر}\ x=0,\mathrm{b}\end{cases}$$

به آسانی می‌توان نشان داد که (A,σ) یک MV-جبر حالت است. در قسمت (ii)، بوضوح $I=\{0,b\}$ یک ایده آل حالت سرسخت n-لایه از (A,σ) است. ولی در قسمت (i)، $I=\{۰\}$ یک ایده آل حالت سرسخت ۱-لایه از (A,σ) نیست. زیرا به ازای $a,b\in A-I$ داریم:

$$\sigma(a)\odot\sigma(b)^*=b\odot b=b\notin I \quad \text{و} \quad \sigma(a)^*\odot\sigma(b)=a\odot a=a\notin I$$

قضیه ۳,۲ *فرض کنید* I *یک ایده آل حالت از سره* (A,σ) *باشد. در این صورت* I *یک ایده آل حالت سرسخت* n*-لایه است اگر و تنها اگر برای هر* $x \in A$،

$$x \in I \quad \text{یا} \quad (\exists\ m \in \mathbb{N}) \quad m\sigma(nx)^* \in I.$$

برهان. فرض کنید که I یک ایده آل حالت سرسخت n-لایه باشد و $x \notin I$. از اینکه I سره است، $1 \notin I$. در نتیجه داریم:

$$\sigma(nx)^* = \sigma(nx)^* \odot 1 \in I \quad \text{و} \quad \cdot = \sigma(x) \odot \sigma(n1)^* \in I$$

بنابراین برای $m = ۱$، داریم:

$$m\sigma(nx)^* \in I.$$

برعکس، فرض کنید $x, y \notin I$. نشان می‌دهیم که:

$$\sigma(ny)^* \odot \sigma(x) \in I \quad \text{و} \quad \sigma(nx)^* \odot \sigma(y) \in I$$

بنا به فرض، چون $x, y \notin I$، پس اعداد طبیعی k, m وجود دارند بطوریکه:

$$k\sigma(ny)^* \in I \quad \text{و} \quad m\sigma(nx)^* \in I$$

لذا داریم:

$$\sigma(y) \odot \sigma(nx)^* \leq \sigma(nx)^* \leq m\sigma(nx)^*$$

و

$$\sigma(x) \odot \sigma(ny)^* \leq \sigma(ny)^* \leq k(\sigma(ny)^*)$$

در نتیجه داریم:

$$\sigma(y) \odot \sigma(nx)^* \in I \quad \text{و} \quad \sigma(x) \odot \sigma(ny)^* \in I$$

بنابراین I یک ایده آل حالت سرسخت n-لایه از (A,σ) است.

نتیجه ۴,۲ *فرض کنید* I *یک ایده آل حالت سره از* (A,σ) *باشد. در این صورت* I *یک ایده آل حالت سرسخت* n*-لایه است اگر و تنها اگر برای هر* $x \in A$،

$$x \in I \quad \text{یا} \quad \sigma(nx)^* \in I$$

برهان. اثبات به کمک تعریف ایده ال و قضیه ۳,۲ بدست می آید.

گزاره ۵,۲ *هر ایده آل حالت سرسخت n-لایه یک ایده آل حالت سرسخت $(n+۱)$-لایه است.*

برهان. فرض کنید I یک ایده آل حالت سرسخت n-لایه از (A,σ) باشد و $x,y \in A-I$. پس طبق فرض داریم:

$$\sigma(nx)^* \odot \sigma(y) \in I \quad \text{و} \quad \sigma(x) \odot \sigma(ny)^* \in I$$

حال باید نشان داد که:

$$\sigma((n+1)x)^* \odot \sigma(y) \in I \quad \text{و} \quad \sigma(x) \odot \sigma((n+1)y)^* \in I$$

بنا به لم ۱۹,۱ (b) داریم:

$$\sigma(ny) \leqslant \sigma((n+1)y)$$

همچنین، بنا به لم ۸,۱ ،(۲)،(1) نتیجه می‌گیریم که:

$$\sigma((n+1)y)^* \odot \sigma(x) \leq \sigma(ny)^* \odot \sigma(x) \in I.$$

بطور مشابه داریم:

$$\sigma((n+1)x)^* \odot \sigma(y) \leq \sigma(nx)^* \odot \sigma(y) \in I.$$

بنا بر ایده ال بودن I داریم:

$$\sigma((n+1)x)^* \odot \sigma(y) \in I \quad \text{و} \quad \sigma((n+1)y)^* \odot \sigma(x) \in I$$

قضیه ۶,۲ *اگر I یک ایده آل حالت سرسخت n-لایه از (A,σ) باشد. آنگاه I یک ایده آل حالت ماکسیمال از (A,σ) است.*

برهان. فرض کنید I یک ایده آل حالت سرسخت n-لایه از (A,σ) باشد بطوریکه ماکسیمال نباشد. پس یک ایده آل حالت سره J وجود دارد بطوریکه $I \subset J$. حال فرض کنید $a \in J-I$.

پس طبق قضیه ۳,۲، $m \in \mathbb{N}$ ای وجود دارد بطوریکه:

$$m\sigma(na)^* \in I.$$

از طرفی می‌دانیم که:

$$\sigma(na)^* \leq m\sigma(na)^*$$

در نتیجه طبق تعریف ایده آل I $\sigma(na)^* \in I$ و به همین ترتیب $\sigma(na)^* \in J$. چون $a \in J$، پس بنا به ایده آل بودن J $na \in J$، پس $\sigma(na) \in J$. بنابراین داریم:

$$۱ = \sigma(na) \oplus \sigma(na)^* \in J.$$

که یک تناقض است.

مثال زیر نشان می دهد عکس قضیه ۶,۲ برقرار نیست.

مثال ۷,۲ *در مثال ۲,۲ (i)، به آسانی می‌توان بررسی کرد که $I = \{۰\}$ یک ایده آل حالت ماکسیمال است.*

مثال زیر نشان می‌دهد که ایده آلهای حالت بولی وجود دارند و یک ایده آل حالت ممکن است یک ایده آل حالت بولی نباشد.

مثال ۸,۲ فرض کنید $A = \{۰, a, b, c, d, ۱\}$ با $۰ < a, b < c < ۱$ و $0 < b < d < 1$ باشد. عملهای $\oplus$، $\odot$ و $*$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$\oplus$	0	a	b	c	d	1
0	0	a	b	c	d	1
a	a	a	c	c	1	1
b	b	c	d	1	d	1
c	c	c	1	1	1	1
d	d	1	d	1	d	1
1	1	1	1	1	1	1

$\odot$	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0
a	0	a	0	a	0	a
b	0	0	0	0	b	b
c	0	a	0	a	b	c
d	0	0	b	b	d	d
1	0	a	b	c	d	1

$*$	0	a	b	c	d	1
	1	d	c	b	a	0

در این صورت $(A,\oplus,\odot,*,0,1)$ یک MV-جبر است [16] .

تعریف می‌کنیم:

$$\sigma(x)=\begin{cases}0 & \text{اگر } x=0,b,d\\ 1 & \text{اگر } x=1,c,a\end{cases}$$

به آسانی می‌توانیم نشان دهیم که (A,σ) یک MV-جبر حالت است و $I_1=\{\cdot\}$ و

$I_2=\{0,b,d\}$ و A ایده آلهای حالتی از (A,σ) هستند [10] . همچنین، با یک محاسبه ساده می‌توان نشان داد که I_2 یک ایده آل حالت بولی از (A,σ) است اما $I_1=\{\cdot\}$ یک ایده آل حالت بولی از (A,σ) نیست. زیرا:

$$(c\oplus\sigma(c))\wedge(b\oplus\sigma(c)^*)=1\wedge b=b\notin\{\cdot\}.$$

تعریف ۹,۲ *یک ایده آل حالت I از (A,σ) یک ایده آل حالت بولی n-لایه از (A,σ) نامیده می‌شود اگر برای هر $x\in A$،*

$$(x\oplus\sigma(x))\wedge((nx)^*\oplus\sigma(nx)^*)\in I.$$

مثال زیر نشان می‌دهد که ایده آلهای حالت بولی n-لایه وجود دارند و یک ایده آل حالت ممکن است یک ایده‌آل حالت بولی n-لایه نباشد.

مثال ۱۰,۲ *در مثال۸,۲، با یک محاسبه ی ساده می‌توان نشان داد که $I_۲=\{\cdot,b,d\}$ یک ایده آل حالت بولی ۲-لایه از (A,σ) است. اما $I_۱=\{\cdot\}$ به عنوان یک ایده ال حالت، یک ایده آل حالت بولی ۱-لایه از (A,σ) نیست، زیرا:*

$$(c\oplus\sigma(c))\wedge(c^*\oplus\sigma(c)^*)=1\wedge b=b\notin\{\cdot\}.$$

قضیه ۱۱,۲ *(خاصیت توسیع برای ایده آلهای حالت بولی n-لایه) فرض کنید که I و J دو ایده آل حالت سره باشند بطوریکه $I\subseteq J$. اگر I یک ایده آل حالت بولی n-لایه باشد، آنگاه J نیز یک ایده آل حالت بولی n-لایه از (A,σ) است.*

برهان. فرض کنید I یک ایده آل حالت بولی n-لایه باشد و $I\subseteq J$، در این صورت برای هر $x\in A$،

$$(x\oplus\sigma(x))\wedge((nx)^*\oplus\sigma(nx)^*)\in I\subseteq J.$$

از این رو برای هر $x\in A$، $(x\oplus\sigma(x))\wedge((nx)^*\oplus\sigma(nx)^*)\in J$. در نتیجه J یک ایده آل حالت بولی n-لایه از (A,σ) است.

قضیه ۱۲,۲ *فرض کنید I یک ایده آل حالت بولی n-لایه و اول از (A,σ) باشد. در این صورت I یک ایده آل حالت سرسخت n-لایه از (A,σ) است.*

برهان. فرض کنید I یک ایده آل حالت بولی n-لایه و اول از (A,σ) باشد. در این صورت برای هر $x\in A$ داریم:

$$(x \oplus \sigma(x)) \wedge ((nx)^* \oplus \sigma(nx)^*) \in I.$$

حال چون I ایده آل حالت اول است. نتیجه می‌گیریم که:

$$x \in I \quad \text{یا} \quad (nx)^* \in I.$$

به همین ترتیب چون I ایده آل حالت است داریم:

$$x \in I \quad \text{یا} \quad \sigma(nx)^* \in I.$$

در نتیجه طبق لم ۴،۲، I یک ایده آل حالت سرسخت n-لایه از (A,σ) است.

قضیه ۱۳،۲ *اگر I یک ایده آل حالت بولی n-لایه از (A,σ) باشد. آنگاه I ایده آل حالت بولی $(n+1)$-لایه از (A,σ) است.*

برهان. فرض کنید I یک ایده آل حالت بولی n-لایه باشد. باید نشان دهیم برای هر $x \in A$،

$$(x \oplus \sigma(x)) \wedge (((n+1)x)^* \oplus \sigma((n+1)x)^*) \in I.$$

چون $nx \leq (n+1)x$ و بنا به لم ۱۹،۱ (b)، $\sigma(nx) \leq \sigma((n+1)x)$. همچنین بنا به لم ۸،۱ (۱)،

$$((n+1)x)^* \leq (nx)^*$$

و در نتیجه $\sigma((n+1)x)^* \leq \sigma(nx)^*$. از این رو داریم:

$$(x \oplus \sigma(x)) \wedge (((n+1)x)^* \oplus \sigma((n+1)x)^*) \leq (x \oplus \sigma(x)) \wedge ((nx)^* \oplus \sigma(nx)^*) \in I.$$

در نتیجه:

$$(x \oplus \sigma(x)) \wedge (((n+1)x)^* \oplus \sigma((n+1)x)^*) \in I.$$

بنابراین I یک ایده آل حالت بولی $(n+1)$-لایه از (A,σ) است.

تعریف ۱۴،۲ *فرض کنید (A,τ) و (B,σ) دو MV-جبر حالت باشند آنگاه $f: A \longrightarrow B$ را یک MV-همریختی حالت گوییم اگر f همریختی MV-جبری باشد و برای هر $x \in A$*

$$f(\tau(x)) = \sigma(f(x)).$$

قضیه ۱۵،۲ *فرض کنید $f: A \longrightarrow B$ یک MV-همریختی حالت باشد و I یک ایده آل حالت بولی n-لایه از (B,σ) باشد، تصویر معکوس I یک ایده آل حالت بولی n-لایه از (A,τ) است.*

برهان. فرض کنید I یک ایده آل حالت بولی n-لایه از (B,σ) و $x \in A$ باشد، باید نشان دهیم:

$$(x \oplus \tau(x)) \wedge ((nx)^* \oplus \tau(nx)^*) \in f^{-1}(I).$$

برای $x \in A$، خواهیم داشت $f(x) \in B$. چون I یک ایده آل حالت بولی n-لایه است، لذا داریم:

$$\begin{aligned}
&(f(x) \oplus \sigma(f(x))) \wedge ((nf(x))^* \oplus \sigma(nf(x))^*) \in I\\
&\Rightarrow (f(x) \oplus f(\tau(x))) \wedge (f(nx)^* \oplus \sigma(f(nx))^*) \in I,\\
&\Rightarrow f(x \oplus \tau(x)) \wedge (f(nx)^* \oplus f(\tau(nx))^*) \in I,\\
&\Rightarrow f(x \oplus \tau(x)) \wedge f((nx)^* \oplus \tau(nx)^*) \in I,\\
&\Rightarrow f[(x \oplus \tau(x)) \wedge ((nx)^* \oplus \tau(nx)^*)] \in I,\\
&\Rightarrow [(x \oplus \tau(x)) \wedge ((nx)^* \oplus \tau(nx)^*)] \in f^{-1}(I).
\end{aligned}$$

بنابراین $f^{-۱}(I)$ یک ایده آل حالت بولی n-لایه از (A,τ) است.

نکته : فرض کنید I و J ایده آلهای حالتی از A باشند. در این صورت داریم:

$$I \vee J = (I,J] = \{a \in A: a \leq b \oplus c, \exists b \in I, c \in J\}.$$

که یک ایده آل حالت از (A,σ) است. اگر I یا J یک ایده آل حالت سرسخت n-لایه و $I \vee J \neq A$ باشد. آنگاه طبق قضیه ۶،۲، I یک ایده آل حالت ماکسیمال است و چون $I \subseteq I \vee J$، در نتیجه $I = I \vee J$ که $I \vee J$ یک ایده آل حالت سرسخت n-لایه از (A,σ) است.

نکته : فرض کنید I و J ایده آلهای حالت بولی n-لایه باشند. آنگاه بنا به قضیه ۱۱،۲، $I \vee J$ نیز یک ایده آل حالت بولی n-لایه است.

لم 16.2 *$\{۰\}$ یک ایده آل حالت بولی n-لایه است اگر و تنها اگر هرایده آل I نیز یک ایده آل حالت بولی n-لایه باشد.*

برهان. بنا به قضیه ۱۱،۲، واضح است.

گزاره ۱۷،۲ *اگر (A,σ) یک MV-جبر حالت باشد. آنگاه $(A/I,\overline{\sigma})$ یک MV-جبر حالت است. که در آن*

$$\overline{\sigma}(x/I) = \sigma(x)/I.$$

برهان. فرض کنید I یک ایده آل حالت از (A,σ) باشد و $x,y\in A$. ابتدا نشان می‌دهیم که $\overline{\sigma}$ خوش تعریف است. فرض کنید که $x/I=y/I$. پس $d(x,y)\in I$. چون I یک ایده آل حالت است، پس $\sigma(d(x,y))\in I$. بنا به لم ۱۹،۱ (e)، داریم:

$$d(\sigma(x),\sigma(y))\leq\sigma(d(x,y))\in I$$

پس $d(\sigma(x),\sigma(y))\in I$. در نتیجه $\sigma(x)/I=\sigma(y)/I$. بنابراین $\overline{\sigma}(x/I)=\overline{\sigma}(y/I)$.

اکنون نشان می دهیم که $(A/I,\overline{\sigma})$ یک MV-جبر حالت است. چون A/I یک MV-جبر حالت است، پس داریم:

$$\overline{\sigma}(1/I)=\sigma(1)/I=1/I\ (MV1)$$

$$\overline{\sigma}((x/I)^*)=\overline{\sigma}(x^*/I)=\sigma(x^*)/I=(\sigma(x))^*/I=(\sigma(x)/I)^*=(\overline{\sigma}(x/I))^*\ (MV2)$$

$(MV3)$

$$\overline{\sigma}\left(\frac{x\oplus y}{I}\right)=\frac{\sigma(x\oplus y)}{I}=\frac{\sigma(x)\oplus\sigma\big(y\ominus(x\odot y)\big)}{I}=\sigma(x)/I\oplus\sigma(y\ominus(x\odot y))/I$$
$$=\overline{\sigma}(x/I)\oplus\overline{\sigma}(y\ominus(x\odot y)/I);$$

$(MV4)$

$$\overline{\sigma}(\overline{\sigma}(x/I)\oplus\overline{\sigma}(y/I))=\overline{\sigma}(\sigma(x)/I\oplus\sigma(y)/I)=\overline{\sigma}((\sigma(x)\oplus\sigma(y))/I)=$$
$$(\sigma(\sigma(x)\oplus\sigma(y)))/I=(\sigma(x)\oplus\sigma(y))/I=\sigma(x)/I\oplus\sigma(y)/I=\overline{\sigma}(x/I)\oplus\overline{\sigma}(y/I).$$

قضیه ۱۸،۲ *I یک ایده آل حالت بولی n-لایه از (A,σ) است اگر و تنها اگر هر ایده آل A/I یک ایده آل حالت بولی n-لایه از $(A/I,\overline{\sigma})$ باشد.*

برهان. فرض کنید I یک ایده آل حالت بولی n-لایه از (A,σ) باشد. لذا داریم:

$$(x\oplus\sigma(x))\wedge((nx)^*\oplus\sigma(nx)^*)\in I$$

$$\Leftrightarrow\frac{(x\oplus\sigma(x))}{I}\wedge\frac{((nx)^*\oplus\sigma(nx)^*)}{I}=\frac{0}{I}$$

$$\Leftrightarrow(\frac{x}{I}\oplus\frac{\sigma(x)}{I})\wedge(\frac{(nx)^*}{I}\oplus\frac{\sigma(nx)^*}{I})=\frac{0}{I}$$

$$\Leftrightarrow(\frac{x}{I}\oplus\overline{\sigma}(\frac{x}{I}))\wedge(\frac{(nx)^*}{I}\oplus\overline{\sigma}(\frac{(nx)^*}{I}))=\frac{0}{I}\in\{[\cdot]\}.$$

لذا $\{[\cdot]\}$ یک ایده آل حالت بولی n-لایه از $(A/I,\overline{\sigma})$ است. لذا بنا به لم ۱۶،۲، نتیجه می‌گیریم که هر ایده آل $(A/I,\overline{\sigma})$ یک ایده آل حالت بولی n-لایه است.

لم ۱۹,۲ *اگر $\{\cdot\}$ یک ایده آل حالت سرسخت n-لایه از (A,σ) باشد. آنگاه تنها ایده آل حالت سرسخت n-لایه از (A,σ)، ایده آل حالت $\{\cdot\}$است.*

برهان. فرض کنید I یک ایده آل حالت دلخواه از (A,σ) باشد. چون $\{\cdot\} \subseteq I$ و $\{\cdot\}$ یک ایده آل حالت سرسخت n-لایه از (A,σ) است. پس طبق قضیه ۶,۲، $\{\cdot\}$ یک ایده آل حالت ماکسیمال است. بنابراین $I=\{\cdot\}$ یک ایده آل حالت سرسخت n-لایه از (A,σ) است.

قضیه ۲۰,۲*اگر I یک ایده آل حالت سرسخت n-لایه از (A,σ) باشد. آنگاه $(A/I,\overline{\sigma})$ یک حالت موضعاً متناهی است.*

برهان. فرض کنیم که I یک ایده آل حالت سرسخت n-لایه از (A,σ) باشد. آنگاه طبق قضیه ۶,۲، I یک ایده‌آل حالت ماکسیمال از (A,σ) است. همچنین طبق قضیه ۳۰,۱، نتیجه می‌گیریم که $(A/I,\overline{\sigma})$ یک حالت موضعاً متناهی است.

لم ۲۱,۲ *اگر $\{\cdot\}$ یک ایده آل حالت سرسخت n-لایه از (A,σ) باشد. آنگاه (A,σ) یک MV-جبر حالت موضعاً متناهی است.*

برهان. فرض کنید که $\{\cdot\}$ یک ایده‌آل حالت سرسخت n-لایه از (A,σ) باشد.لذا بنا به قضیه ۶,۲، نتیجه می‌گیریم که $\{\cdot\}$ یک ایده آل حالت ماکسیمال از (A,σ) می‌باشد. بنابراین

$A/\{0\} \simeq A$ یک حالت موضعاً متناهی است.

در مثال زیر، نشان می‌دهیم که عکس لم بالا درست نیست.

مثال ۲۲,۲ *فرض کنید $A=\{۰,۱,۲\}$ با $۰<۱<۲$ باشد. عملهای $\oplus$، $\odot$ و $*$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:*

$\oplus$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	2
2	2	2	2

$\odot$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	1	2

$*$	0	1	2
0	2	1	0

بوضوح $(A,\oplus,\odot,*,۰,۲)$ یک MV-جبر موضعاً متناهی است [16] .

σ را یک همانی روی A در نظر می‌گیریم. در این صورت (A,σ) یک MV-جبر حالت موضعاً متناهی است. اما $I=\{\cdot\}$ یک ایده‌آل حالت سرسخت ۱-لایه از (A,σ) نیست. زیرا:

$$\forall 1,2 \in A - I \quad ; \quad \sigma(1)^* \odot \sigma(2) = 1^* \odot 2 = 1 \odot 2 = 1 \notin I.$$

یادآوری می کنیم که یک MV-جبر حالت (A,σ) نیمه ساده است اگر و تنها اگر غیر بدیهی باشد و $Rad_\sigma(A) = \{0\}$ [5].

نتیجه ۲۳٫۲ *اگر $\{0\}$ یک ایده آل حالت سرسخت n-لایه از (A,σ) باشد، آنگاه (A,σ) یک MV-جبر حالت نیمه ساده است.*

برهان. فرض کنیم $\{0\}$ یک ایده آل حالت سرسخت n-لایه از (A,σ) باشد. در نتیجه طبق قضیه ۶٫۲، $\{0\}$ یک ایده‌آل حالت ماکسیمال از (A,σ) است. پس داریم: $Rad_\sigma(A) = \{0\}$. بنابراین (A,σ) یک MV-جبر حالت نیمه ساده است.

مثال زیر نشان می دهد که در حالت کلی عکس نتیجه بالا درست نیست.

مثال ۲۴٫۲ *در مثال ۳٫۲ (i)، داریم که $I = \{0\}$ یک ایده آل حالت از (A,σ) است بطوریکه*

$Rad_\sigma(A) = \{0\}$. پس (A,σ) یک MV-جبر حالت نیمه ساده است. اما $I = \{0\}$ یک ایده آل حالت سرسخت ۱-لایه از (A,σ) نیست. زیرا به ازای هر $a, b \in A - I$،

$$a = a \odot a = \sigma(b) \odot \sigma(a)^* \notin I \quad \text{و} \quad b = b \odot b = \sigma(a) \odot \sigma(b)^* \notin I$$

قضیه ۲۵٫۲ *فرض کنید I یک ایده آل حالت از (A,σ) باشد. در این صورت I یک ایده آل حالت سرسخت n-لایه است اگر و تنها اگر $[0]$ یک ایده آل حالت سرسخت n-لایه از A/I باشد.*

برهان. فرض کنید که I یک ایده آل حالت سرسخت n-لایه از (A,σ) باشد. همچنین فرض کنید

$x/I \notin \{[0]\}$، طبق لم ۱۶٫۲، کافیست نشان دهیم که $(\sigma(nx)/I)^* \in \{[0]\}$. چون $x/I \notin \{[0]\}$، پس $x/I \neq 0/I$ در نتیجه $d(x,0) \notin I$، پس $x \notin I$. طبق فرض نتیجه می‌گیریم که $\sigma(nx)^* \in I$، پس داریم:

$$\sigma(nx)^* = d(\sigma(nx)^*, 0) \in I.$$

از طرفی دیگر

$$\overline{\sigma}((nx/I)^*) = \sigma(nx)^*/I \in \{[0]\} \quad \text{یا} \quad \sigma(nx)^*/I = 0/I$$

پس در نتیجه $\{[0]\}$ یک ایده آل حالت سرسخت n-لایه از (A,σ) است. لذا بنا برلم ۲٫۱۹، نتیجه می‌گیریم که هر ایده آل از A/I یک ایده آل حالت سرسخت n-لایه است.

برعکس، فرض کنید که هر ایده آل حالت از جبر خارج قسمتی $(A/I,\overline{\sigma})$ یک ایده آل حالت سرسخت n-لایه باشد و $x \in A$ بطوریکه $x \notin I$. حال باید نشان دهیم که $\sigma(nx)^* \in I$. طبق فرض نتیجه می‌گیریم که $x/I \neq \cdot/I$ پس در نتیجه داریم: $x/I \notin \{[\cdot]\}$. حال چون $\{[\cdot]\}$ یک ایده آل حالت از $(A/I,\overline{\sigma})$ هست. لذا بنا به فرض، $\{[\cdot]\}$ یک ایده آل حالت سرسخت n-لایه است.

بنابراین $\overline{\sigma}(nx/I)^* = \sigma(nx)^*/I \in \{[\cdot]\}$، در نتیجه $\sigma(nx)^*/I = \cdot/I$. پس $\sigma(nx)^* \in I$. بنابراین I یک ایده آل حالت سرسخت n-لایه از (A,σ) است.

در قضیه زیر، تصویر معکوس یک ایدهآل حالت سرسخت n-لایه تحت یک MV-همریختی را بررسی می‌کنیم.

قضیه ۲۶,۲ *فرض کنید $f: A \longrightarrow B$ یک MV-همریختی حالت باشد و I یک ایده آل حالت سرسخت از (B,σ) باشد. تصویر معکوس I یک ایده آل حالت سرسخت n-لایه از (A,τ) است.*

برهان. فرض کنید I یک ایده آل حالت سرسخت n-لایه از (B,σ) و $x \in A$ باشد. بطوریکه

$x \notin f^{-1}(I)$، در این صورت $f(x) \notin I$. چون I یک ایده آل حالت سرسخت n-لایه از (B,σ) است. طبق لم ۴,۲، و چون f، MV-همریخت حالت است، نتیجه می‌گیریم که:

$$f(\tau(nx)^*) = f(\tau(nx))^* = \sigma(f(nx))^* = \sigma(nf(x))^* \in I.$$

پس در نتیجه $\tau(nx)^* \in f^{-1}(I)$. بنابراین $f^{-1}(I)$ یک ایده آل حالت سرسخت n-لایه از (A,τ) است.

قضیه ۲۷,۲ *اگر P یک ایده آل حالت سرسخت n-لایه از (A,σ) باشد، آنگاه P یک ایده آل حالت اولیه از (A,σ) است.*

برهان. فرض کنید $a \odot b \in P$ بطوریکه برای هر $n \geq 1$، $\sigma(a)^n \notin P$. چون P یک ایده آل حالت سرسخت n-لایه است و از طرفی داریم $a \notin P$ و $1 \notin P$، پس در نتیجه:

$$\sigma(n1)^* \odot \sigma(a) \in P \qquad \text{و} \qquad \sigma(1) \odot \sigma(na)^* \in P$$

لذا نتیجه می‌گیریم که $\sigma(na)^* \in P$. همچنین طبق لم ۱۹,۱ (f)، داریم:

$$\sigma(a) \odot \sigma(b) \leq \sigma(a \odot b) \in P$$

پس $\sigma(a) \odot \sigma(b) \in P$ و به همین ترتیب $\sigma(na)^* \oplus (\sigma(a) \odot \sigma(b)) \in P$. از طرفی دیگر داریم

$\sigma(b) \leq \sigma(na)^* \vee \sigma(b) \in P$، در نتیجه برای $n = 1$، $\sigma(b)^1 \in P$. بنابراین P یک ایده آل حالت اولیه از (A,σ) است.

مثال زیر نشان می‌دهد که یک ایده آل حالت اولیه ممکن است یک ایده آل حالت سرسخت n-لایه نباشد.

مثال ۲۸،۲ *فرض کنید* $A = \{۰, a, b, c, d, ۱\}$ *با* $۰ < a, b < c < ۱$ و

$0 < b < d < 1$ باشد. عملهای $\oplus$، $\odot$ و $*$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$\oplus$	0	a	b	c	d	1
0	0	a	b	c	d	1
a	a	a	c	c	1	1
b	b	c	d	1	d	1
c	c	c	1	1	1	1
d	d	1	d	1	d	1
1	1	1	1	1	1	1

$\odot$	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0
a	0	a	0	a	0	a
b	0	0	0	0	b	b
c	0	a	0	a	b	c
d	0	0	b	b	d	d
1	0	a	b	c	d	1

$*$	0	a	b	c	d	1
	1	d	c	b	a	0

در این صورت $(A,\oplus,\odot,*,0,1)$ یک MV-جبر است [۱۶].

فرض کنید σ همانی باشد، به این ترتیب (A,σ) یک MV-جبر حالت است. واضح است که $I = \{۰, c\}$ یک ایده آل حالت اولیه است. از طرفی چون به ازای $a, b \in A - I$ داریم:

$$\sigma(a) \odot \sigma(b)^* = a \odot c = a \notin I \quad \text{و} \quad \sigma(b) \odot \sigma(a)^* = b \odot d = b \notin I$$

پس I یک ایده آل حالت سرسخت ۱-لایه از A نیست.

گزاره ۲۹،۲ *فرض کنید* (A, σ) *یک* MV*-جبر حالت باشد.*

(i) اگر I یک ایده آل سرسخت n-لایه از $\sigma(A)$ باشد، آنگاه $\sigma^{-1}(I)$ یک ایده آل حالت سرسخت n-لایه از (A, σ) است.

(ii) اگر I یک ایده آل حالت سرسخت n-لایه از (A,σ) باشد. آنگاه $\sigma(I)$ یک ایده آل سرسخت n-لایه از $\sigma(A)$ است.

(i) برهان. اگر I یک ایده آل از $\sigma(A)$ باشد، آنگاه بنا به گزاره ۲۵٫۱، ثابت می‌شود که $\sigma^{-1}(I)$ یک ایده آل حالت از (A,σ) است. اکنون فرض کنیم که I یک ایده آل سرسخت n-لایه از $\sigma(A)$ باشد. همچنین فرض کنیم

$a \notin \sigma^{-1}(I)$، پس $\sigma(a) = \sigma(\sigma(a)) \notin I$. در نتیجه بنا به لم ۱۹٫۱ (b)، چون $a \leq na$ درنتیجه $\sigma(a) \leq \sigma(na)$، پس $\sigma(na) \notin I$. چون I یک ایده آل سرسخت n-لایه از $\sigma(A)$ است. پس $\sigma(\sigma(na)^*) = \sigma(\sigma(na))^* = \sigma(na)^* \in I$. پس داریم: $\sigma(na)^* \in \sigma^{-1}(I)$. بنابراین $\sigma^{-1}(I)$ یک ایده آل حالت سرسخت n-لایه از (A,σ) است.

(ii) فرض کنید I یک ایده آل حالت سرسخت n-لایه از (A,σ) باشد. بنا به حکم ۲۴٫۱، داریم:

$\sigma(I) = I \cap \sigma(A)$. فرض کنید I یک ایده آل حالت سرسخت n-لایه از (A,σ) باشد و

$\sigma(a) \notin \sigma(I)$. چون $\sigma(a) \in \sigma(A)$ و $\sigma(I) = I \cap \sigma(A)$، پس در نتیجه $\sigma(a) \notin I$ و لذا $a \notin I$. همچنین، چون I یک ایده آل حالت سرسخت n-لایه از (A,σ) است، پس $\sigma(na)^* \in I$ و در نتیجه

$$\sigma(na)^* = \sigma((na)^*) = \sigma(\sigma(na^*)) = \sigma(\sigma(na)^*) \in \sigma(I).$$

بنابراین $\sigma(I)$ یک ایده آل سرسخت n-لایه از $\sigma(A)$ است.

References

1. L. P. Belluce, Semisimple algebras of infinite valued logic and bold fuzzy set theory, Canad. J. Math., vol. **38** (1986) , 1356-1379.
2. L. Birkhoff, American Mathematical Society Raode Island, (1940).
3. A. D. M. Botur, State-morphism algebras general approach, Fuzzy Sets Sys, vol. **218** (2013), 90-102.
4. C. C. Chang, Algebraic analysis of many valued logic, Trans. Amer. Math. Soc, vol**. 88** (1958), 467-490.
5. R. Cignoli, I. M. L. D’Ottaviano, D. Mundici, Algebraic Foundations of Many-Valued Reasoning, Kluwer Academic, Dordrecht, (2000).

6. L. C. Ciungu, A. Dvurecenskij, M. Hycko, State BL-algebras, Soft Comput., **15** (2011), 619-634.
7. A. Di Nola, A. Dvurečenskij, State-morphism MV-algebras. Ann Pure Appl Logic **161** (2009),161-173.
8. A. Di Nola, A. Dvurečenskij, A. Lettieri, On varieties of MV-algebras with internal states, Inter. J. Approx, Reasoning, (2010), to appear.
9. A. Dvurečenskij, J. Rachu°nek, D. Salounova, State operators on generalizations of fuzzy structures, Fuzzy Sets Syst., **187** (2012), 58-76.
10. F. Forouzesh, A. Darijani, Some calsses of state ideals in state MV-algebras, Eurasian Mathematical Journal, Vol. 10, No. **2** (2019), 37-48.
11. F. Forouzesh, E. Eslami, A. Borumand Saeid, Radical of A-ideals in MV-modules, Analeles, Tiint, Ifice Ale Universitate, II "AL. I. Cuza" Dinias, I (S. N.) Mathematicea, Tomul Lexii, **f.1**(2016), 33-56.
12. F. Forouzesh, E. Eslami, A. Borumand Saeid, On obstinate ideals in MV-algebras, Politehn. Univ. Bucharest. Sci Bull Series A, Appli Math. Phys. Vol. **76** (2014), 53-62.
13. T. Flaminio, Montagna F, An algebraic approach to states on MV-algebras, In: Novák V (ed) Fuzzy Logic 2, proceedings of the 5th EUSFLAT conference, September 11–14, Ostrava, vol **II** (2007), 201-206.
14. T. Flaminio, F. Montagna, MV-algebras with internal states and probabilistic, fuzzy logic. Int J Approx Reason **50** (2009), 138-152.
15. G. Gratzer, Universal Algebra, seconded, New York, (1979).
16. A. Iorgulescu, Algebras of logic as BCK algebras, Academy of economic, studies Bucharest, Roman(۲۰۰۸).
17. A. Kroupa, Every state on semisimple MV-algebra is integral. Fuzze Setse Syst **157** (2006), 2771-2782.
18. J. Kuhr, D. Mundici, De Fineti theorem and Borel states in [0 , 1]-valued algebraic, logic. Int J Approx Reason **46** (2007), 605-616.
19. S. Motamed and A. Borumand, n-fold obstinate filters in BL-algebras, Neural Computing and Applications **20** (2011), 461-472.
20. D. Mundici, Averaging the truth value in Lukasiewicz sentential logic. Studia Logica **55** (1995), 113-127.
21. D. Mundici, Interpretation of AFC-algebras in Lukasiewicz sentential calculus, Journal of Functional Analysis **65** (1986), 15-63.