Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://jemr.khu.ac.ir/

Generalized Binomial Edge Ideal and The Corona Product of Graphs

Sara Saeedi Madani

Pure Mathematics group, Department of Mathematics and Computer Science, Amirkabir University of Technology, Tehran, Iran. Email: sarasaeedi@aut.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 16 August 2024
Received in revised form: 25 September 2024
Accepted: 12 October 2024
Published online: 10 February 2025

Keywords:
Generalized binomial edge ideal,
Corona product,
height of ideal,
Krull dimension.

ABSTRACT

Introduction

In last decades, the study of algebraic structures associated with combinatorial objects and structures has extensively attracted researchers all over the world. Among them, one can mention binomial edge ideals of graphs which were introduced by Herzog et al. in [9] as well as Ohtani in [16] independently. Based on the importance of determinantal ideals in commutative algebra and algebraic geometry, binomial edge ideals have become highly interesting and popular among many researchers from commutative algebra community. Later, some variations of such ideals were considered and one of them is the main object of this article.

Materical and Methods

Let G be a simple graph, i.e., a graph with no loops and multiple edges, with the vertex set $V(G) = \{1,\dots,n\}$ and the edge set $E(G)$. On the other hand, let K be a field and $S = K[x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n]$ be the polynomial ring with $2n$ variables over K. Then the binomial edge ideal of G, denoted by J_G, is defined as

$$J_G = \left(f_{ij} | \{i,j\} \in E(G), 1 \le i < j \le n\right),$$

where $f_{ij} = x_i y_j - x_j y_i$.

Many of algebraic and homological properties of J_G were investigated by several authors, see for example [1-3], [5], [6], [8], [10], [12], [14], [18-22] and [24]. In 2014, Ene et al. in [7] introduced a generalization of binomial edge deals. Let G_1 and G_2 be two graphs such that $V(G_1) = \{1,\dots,m\}$ and $V(G_2) = \{1,\dots,n\}$. Also, suppose that $X = (x_{ij})$ is an $(m \times n)$-matrix of variables x_{ij} with $m,n \ge 2$. Let $S = K[X]$ be the polynomial ring over K with variables x_{ij}, and let $p_{e,f} = x_{it}x_{jl} - x_{il}x_{jt}$ in which $e = \{i,j\}$ and $f = \{t,l\}$ with $i < j$ and $t < l$. The binomial edge ideal of the pair of graphs (G_1, G_2) is then denoted by J_{G_1,G_2} and defined as

$$J_{G_1,G_2} = \left(P_{e,f} | e \in E(G_1), f \in E(G_2)\right).$$

Several Properties of J_{G_1,G_2} were considered in [7], [13] and [23].

In case one of the graphs G_1 or G_2, say G_1, is a complete graph, the corresponding ideal is called the generalized binomial edge ideal of G_2. To see some results about these types of ideals see for example [4], [15], [17] and [25]. In this paper, our focus is on this class of binomial ideals for graphs obtained by corona product of two other graphs. Let G and H be two graphs.

Then the corona product $H \odot G$ is the graph obtained from the graph H and $|V(H)|$ copies of the graph G such that if we denote the copy of G corresponding to $v \in V(H)$ by G_v, then all vertices of G_v are adjacent to H. We are interested in some important invariants such as the height and the Krull dimension. Therefore, we need to use the minimal prime ideals of generalized binomial edge ideals.

Results and discussion

Let H and H' be two connected graphs with $V(H) \cap V(H') = \emptyset$. Let $\emptyset \neq T \subseteq V(H)$, and for each $v \in T$, let $T_v \in \mathcal{C}(H'_v)$ where if $N_H(v) \subseteq T$, then $T_v \neq \emptyset$. Then we say that the sets T and T_v for any $v \in T$, satisfies the property $\mathcal{P}$. This description plays an important role in determining minimal prime ideals of the generalized binomial edge ideal of a graph. Indeed, the main step for us is to determine the minimal prime ideals of $J_{K_m,G}$ in terms of the sets satisfying the above property. Then we are able to compute the height of $J_{K_m,G}$ as well as the Krull dimension of $\frac{S}{J_{K_m,G}}$. These computations are useful to study unmixedness and Cohen-Macaulayness of such ideals and rings.

Conclusion

Based on recognizing the minimal prime ideals of $J_{K_m,H\odot H'}$ for two H and H', we can compute the height and the Krull dimension of $\frac{S}{J_{K_m,H\odot H'}}$ in terms of the corresponding invariant of the prime ideals $P_T(K_m,H)$ and $P_T(K_m,H')$.

Although the aforementioned formulas are explicit, by adding certain conditions to the underlying graphs, like unmixedness or completeness, we get simpler formulas to compute those invariants.

How to cite: Saeedi Madani, Sara. (2024). Generalized Binomial Edge Ideal and The Corona Product of Graphs. *Mathematical Researches*, **10** (4), 100 – 112.

 Publisher: Kharazmi University

شاپا چاپی: ۲۵۸۸-۲۵٤٦
شاپا الکترونیکی: ۲۵۸۸-۲۵٥٤

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

ایده‌آل یالی دوجمله‌ای تعمیم‌یافته و حاصل‌ضرب کورونای گراف‌ها

سارا سعیدی مدنی

۱ گروه ریاضی محض، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران. رایانامه: sarasaeedi@aut.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۵/۲۶
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۷/۴
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۷/۲۱
تاریخ انتشار: ۱۴۰۳/۱۲/۱۰

واژه‌های کلیدی:
ایده‌آل یالی دوجمله‌ای تعمیم یافته،
ضرب کورونا،
ارتفاع ایده‌آل،
بعد کرول.

چکیده

در این مقاله، ایده‌ال‌های یالی دوجمله‌ای تعمیم‌یافته حاصل‌ضرب کورونای دو گراف مورد بررسی قرار گرفته‌اند. به ویژه، فرمول‌هایی صریح برای محاسبه‌ی ارتفاع و بُعد کرول این ایده‌ال‌ها برحسب گراف‌های شرکت کننده در ضرب کورونا ارائه شده است. به‌علاوه، با افزودن شرایط خاصی روی آن گراف‌ها، فرمول‌های ساده‌تری حاصل شده‌اند.

استناد: سعیدی مدنی، سارا (۱۴۰۳). ایده‌آل یالی دوجمله‌ای تعمیم‌یافته و حاصل‌ضرب کورونای گراف‌ها. *پژوهش‌های ریاضی*، **۱۰** (۴)، ۱۰۰ – ۱۱۲.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

۱. مقدمه

در دهه‌های اخیر مطالعه‌ی ساختارهای جبری وابسته به اشیاء و ساختارهای ترکیبیاتی، به‌طور گسترده مورد توجه محققین سراسر دنیا قرار گرفته است. از این میان، می‌توان به ایده‌ال‌های یالی دوجمله‌ای وابسته به گراف‌ها اشاره کرد که توسط هرزوگ و همکارانش در [9] و اوهتانی در [16] به‌طور مستقل و جداگانه معرفی شدند. با توجه به اهمیت ایده‌ال‌های دترمینانی در جبر جابه‌جایی و هندسه جبری، ایده‌ال‌های یالی دوجمله‌ای گراف‌ها توجه بسیاری از محققین شاخه‌ی جبر جابه‌جایی را به خود جلب نمود. برای تعریف دقیق این رده از ایده‌ال‌ها، فرض کنید G یک گراف ساده با مجموعه رئوس $V(G)=\{1,\dots,n\}$ و مجموعه یال‌های $E(G)$ باشد. در اینجا منظور از یک گراف ساده، گرافی است که یال چندگانه، یال جهت‌دار و طوقه ندارد. در سراسر این مقاله، همه‌ی گراف‌ها، ساده هستند. حال فرض کنید K یک میدان و $R=K[x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n]$ یک حلقه‌ی چند جمله‌ای‌ها با $2n$ متغیر باشد. در این صورت، ایده‌ال یالی دوجمله‌ای وابسته به گراف G که با J_G نمایش داده می‌شود، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$J_G=\left(f_{ij}|\{i,j\}\in E(G),\qquad 1\le i<j\le n\right),$$

که در آن، $f_{ij}=x_iy_j-x_jy_i$. روشن است که اگر G گراف کامل n رأسی K_n باشد (یعنی گرافی که همه‌ی رئوس آن به هم متصل هستند)، آنگاه J_G ایده‌ال تولید شده توسط همه‌ی کهادهای از سایز ۲ از ماتریس زیر است که یک ایده‌ال دترمینانی است که خواص آن شناخته شده است:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix}.$$

بسیاری از خواص جبری و همولوژیکی ایده‌ال J_G برای گراف دلخواه G یا برای رده‌های مشهوری از گراف‌ها در دو دهه‌ی اخیر مطالعه شده‌اند و هدف، به‌طور کلی و غالباً آن بوده است که این خواص، برحسب ویژگی‌های گرافی و ترکیبیاتی مربوط به G قابل بیان باشند. برای مثال، می‌توان به مراجع [1-3]، [5]، [6]، [8]، [10]، [12]، [14]، [18-22] و [24] اشاره نمود.

در سال ۲۰۱۴، اِنه و همکارانش در [7] تعمیمی از ایده‌ال‌های یالی دوجمله‌ای را تحت عنوان ایده‌ال یالی دوجمله‌ای یک جفت گراف معرفی کردند و به بررسی برخی ویژگی‌های آن پرداختند. برای تعریف دقیق این رده از ایده‌ال‌ها، فرض کنید G_1 و G_2 دو گراف باشند به‌طوری که $V(G_1)=\{1,\dots,m\}$ و $V(G_2)=\{1,\dots,n\}$. به‌علاوه فرض کنید $X=(x_{ij})$ یک ماتریس $m\times n$ از متغیرهای x_{ij} باشد و $m,n\ge 2$. اگر $S=K[X]$ حلقه‌ی چندجمله‌ای‌ها روی میدان K و با متغیرهای ماتریس X باشد، آنگاه دوجمله‌ای $p_{e,f}$ در S به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$p_{e,f}=x_{it}x_{jl}-x_{il}x_{jt},$$

که در آن $e=\{i,j\}$، $f=\{t,l\}$، $i<j$ و $t<l$.

حال، ایده‌ال یالی دوجمله‌ای جفت گراف (G_1, G_2) که با J_{G_1,G_2} نمایش داده می‌شود، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$J_{G_1,G_2} = \left(p_{e,f} | e \in E(G_1), f \in E(G_2)\right).$$

در واقع، $p_{e,f}$ یک کهاد از سایز ۲ از ماتریس X است که از دو سطر متناظر با یال e در G_1 و از دو ستون متناظر با یال f در G_2 حاصل شده است.

برخی ویژگی‌های جبری و همولوژیکی این رده از ایده‌ال‌ها نیز در مقالاتی مورد بررسی قرار گرفته‌اند، مانند [7]، [13] و [23]. اگرچه این مطالعه تا کنون به گستردگی مطالعه‌ی ایده‌ال‌های یالی دوجمله‌ای نبوده است، در حالتی که یکی از گراف‌های G_1 یا G_2، گراف کامل باشد، تلاش‌های بیشتری برای رصد کردن ویژگی‌های جبری صورت گرفته است. بدون کاستن از کلیت مسئله، فرض کنید G_1 گراف کامل m رأسی K_m باشد. در این صورت، اگر G گرافی n رأسی باشد، آنگاه ایده‌ال $J_{K_m,G}$ در حلقه چندجمله‌ای‌های S، ایده‌ال یالی دوجمله‌ای تعمیم‌یافته نامیده می‌شود. واضح است که اگر $m = 2$، آنگاه این ایده‌ال، همان ایده‌ال یالی دوجمله‌ای برای گراف G خواهد بود. برخی از ویژگی‌های این ایده‌ال برای مثال در [4]، [15]، [17] و [25] مطالعه شده‌اند. در این مقاله نیز ما قصد داریم روی ایده‌ال‌های یالی دوجمله‌ای تعمیم‌یافته‌ی گراف‌ها تمرکز نماییم و برخی از ویژگی‌های جبری آن‌ها را مطالعه نماییم. به‌طور دقیق‌تر، پس از معرفی برخی پیش‌نیازها و نمادگذاری‌ها از جبر و نظریه‌ی گراف که در ادامه‌ی مقاله مورد نیاز هستند، ایده‌ال یالی دوجمله‌ای تعمیم‌یافته را برای گراف حاصل از ضرب کورونای گراف‌ها بررسی می‌نماییم. با استفاده از توصیف ترکیبیاتی ایده‌ال‌های اول مینیمال این ایده‌ال‌ها، به محاسبه‌ی ارتفاع آن‌ها و همچنین بُعد کرول حلقه‌ی خارج قسمتی آن‌ها برحسب ایده‌ال‌های وابسته به گراف‌های اولیه می‌پردازیم. به‌علاوه، با افزودن شرایطی روی گراف‌های شرکت کننده در ضرب کورونا، به فرمول‌هایی صریح‌تر برای این ناورداهای جبری می‌رسیم.

۲. برخی پیش‌نیازها و نمادگذاری‌ها

همان‌طور که در بخش قبل اشاره شد، در اینجا همه گراف‌ها ساده هستند. فرض کنید G یک گراف با مجموعه رئوس $V(G)$ و مجموعه یال‌های $E(G)$ باشد. اگر $v \in V(G)$، آنگاه مجموعه‌ی همسایه‌های رأس v را با نماد $N_G(v)$ نمایش می‌دهیم و در واقع داریم:

$$N_G(v) = \{w \in G | \{v, w\} \in E(G)\}.$$

در ادامه، گاهی لازم است که گراف کامل روی مجموعه رئوس $V(G)$ را در نظر بگیریم. این گراف را گاهی با نماد $\tilde{G}$ نمایش می‌دهیم.

فرض کنید $T \subseteq [n]$. در این صورت، منظور از $G - T$ گرافی است که از حذف رئوس T و یال‌های متصل به آن رئوس از گراف G به‌دست می‌آید. به این ترتیب، $G - T$ یک زیرگراف القایی برای G است. در حالت کلی، اگر $W \subseteq V(G)$، آنگاه

زیرگراف القایی G روی W که آن را با نماد G_W نمایش می‌دهیم، عبارت است از زیرگرافی از G که مجموعه‌ی رئوس آن W است و دو رأس از W در G_W به هم متصل هستند هرگاه در G نیز به هم متصل باشند. بنابراین $G-T=G_{V(G)\setminus T}$.

به خاطر بیاورید که یک رأس از گراف G را برشی گوییم، هرگاه حذف آن از G، تعداد مولفه‌های همبندی گراف حاصل را نسبت به G افزایش دهد.

حال، گوییم T برای G دارای خاصیت رأس برشی است، هرگاه برای هر $i \in T$، رأس i یک رأس برشی برای گراف $G_{(V(G)\setminus T)\cup\{i\}}$ باشد. به‌علاوه، قرار می‌دهیم:

$$\mathcal{C}(G)=\{\emptyset\}\cup\left\{T \mid \text{دارای خاصیت رأس برشی برای } G \text{ است } T\right\}.$$

فرض کنید مولفه‌های همبندی $G-T$، به‌صورت $G_1,\dots,G_{c_G(T)}$ باشند و $m \geq 2$ عددی صحیح باشد. قرار می‌دهیم:

$$P_T(K_m,G)=\left(x_{ij} \middle| (i,j)\in[m]\times T\right)+J_{k_m,\tilde{G}_1}+\cdots+J_{k_m,\tilde{G}_{c_G(T)}}$$

که در آن $[m]=\{1,\dots,m\}$. به سادگی می‌توان دید که $P_T(K_m,G)$ ایده‌ال اول شامل $J_{K_m,G}$ است. در [17] نشان داده است که ایده‌ال‌های اول مینیمال $J_{K_m,G}$ دقیقاً به فرم $P_T(K_m,G)$ هستند که $T\in\mathcal{C}(G)$ و به‌علاوه داریم:

$$J_{K_m,G}=\bigcap_{T\in\mathcal{C}(G)} P_T(K_m,G).$$

یادآوری می‌کنیم که اگر $I\subseteq S$، آنگاه ارتفاع I که آن را در اینجا با $\operatorname{ht} I$ نمایش می‌دهیم، عبارت است از

$$\operatorname{ht} I=\min\left\{\operatorname{ht} P \mid \text{یک ایده‌ال اول مینیمال } I \text{ است } P\right\},$$

و به‌علاوه، بُعد کرول $\frac{S}{I}$ عبارت است از:

$$\dim\frac{S}{I}=mn-\operatorname{ht} I.$$

نتیجه‌ای کلاسیک و مفید در مورد ارتفاع ایده‌ال‌های دترمینانی وجود دارد که به آن اشاره می‌نماییم ([11] را ببینید):

لم ۱. اگر $I_t(X)\subseteq S$ ایده‌ال تولید شده توسط همه‌ی کهادهای از سایز t باشد که $t\geq 2$، آنگاه داریم:

$$\operatorname{ht} I_t(X)=(m-t+1)(n-t+1).$$

در سراسر مقاله، منظور از S_G، به‌طور طبیعی حلقه‌ی چندجمله‌ای‌ها با متغیرهای مناسب برای رئوس گراف G است، یعنی آن متغیرهایی که اندیس دوم آن‌ها متناظر با رئوس گراف G هستند و اندیس اول آن‌ها از ۱ تا m است.

روشن است که اگر G گرافی همبند باشد، آنگاه داریم:

$$P_\phi(K_m, G) = J_{K_m,K_n} = I_2(X).$$

بنابراین طبق لم ۱، داریم:

$$ht\ P_\phi(K_m, G) = ht\ J_{K_m,K_n} = (m-1)(n-1). \tag{1}$$

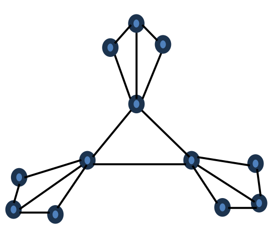
در نتیجه، با توجه به ساختار $J_{K_m,\tilde{G}_i}$ برای هر i، با فرض اینکه هر یک از G_iها، n_i رأسی باشد، داریم:

$$\begin{aligned} htP_T(K_m, G) &= m|T| \\ &+ \sum_{i=1}^{c_G(T)} htJ_{K_m,\tilde{G}_i} = m|T| + \sum_{i=1}^{c_G(T)} (m-1)(n_i-1) \\ &= m|T| + (m-1)\big(n - |T| - c_G(T)\big) \\ &= (m-1)\big(n - c_G(T)\big) + |T|. \qquad (2) \end{aligned}$$

۳. حاصل‌ضرب کورونای دو گراف

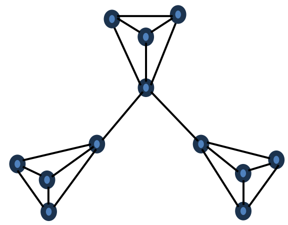
فرض کنید H و G دو گراف باشند. در این صورت حاصل‌ضرب کورونای $H \odot G$ از H و G عبارت است از گرافی که از گراف H و تعداد $|V(H)|$ کپی از گراف G به‌دست می‌آید. با این ترتیب که اگر کپی متناظر با رأس $v \in V(H)$ از گراف G را G_v بنامیم، آنگاه همه‌ی رئوس G_v را به رأس v وصل می‌کنیم. به این ترتیب، گراف $H \odot G$ دارای $|V(H)| + |V(H)||V(G)|$ رأس است.

مثال ۱. فرض کنید $H = K_3$ و $G = P_3$، به‌ترتیب یک مثلث و یک مسیر ۳ رأسی باشند. در این صورت حاصل‌ضرب کورونای $H \odot G$، به صورت شکل ۱ است.



شکل ۱. گراف $K_3 \odot P_3$.

تذکر. از تعریف حاصل‌ضرب کرونای دو گراف، روشن است که ترتیب گراف‌های شرکت کننده در حاصل‌ضرب مهم است. برای مثال، چنانچه ترتیب گراف‌های K_3 و P_3 را در مثال ۱ تغییر دهیم، گراف حاصل متفاوت خواهد بود. شکل ۲ را ببینید. برای مثال، $K_3 \odot P_3$ رئوسی از درجه ۲ دارد، در حالی که $P_3 \odot K_3$ دارای هیچ رأسی از درجه‌ی ۲ نیست.



شکل ۲. گراف $P_3 \odot K_3$.

۴. ارتفاع و بُعد ایده‌ال یالی دوجمله‌ای تعمیم‌یافته

برای توصیف ترکیبیاتی ایده‌ال‌های اول مینیمال ایده‌ال یالی دوجمله‌ای تعمیم‌یافته‌ی حاصل‌ضرب کورونای دو گراف، ابتدا تعریف خاصیت $\mathcal{P}$ را از [13] یادآوری می‌کنیم.

فرض کنید H و H' دو گراف همبند باشند به‌طوری که $V(H) \cap V(H') = \emptyset$. حال، فرض کنید $\emptyset \neq T \subseteq V(H)$ و برای هر $v \in T$، زیرمجموعه‌ی T_v از $V(H'_v)$ را به این صورت در نظر بگیرید که $T_v \in \mathcal{C}(H'_v)$ و به‌علاوه، اگر $N_H(v) \subseteq T$، آنگاه بتوان نتیجه گرفت که $T_v \neq \emptyset$. در این صورت، گوییم که مجموعه‌های T و T_v برای هر $v \in T$، در خاصیت $\mathcal{P}$ صدق می‌کنند.

با استفاده از تعبیر خاصیت $\mathcal{P}$ ، مجموعه‌های با خاصیت رأس برشی برای حاصل‌ضرب کورونای دو گراف همبند در گزاره‌ی زیر در [13] به‌طور کامل مشخص شده‌اند.

گزاره ۱. فرض کنید H و H' دو گراف همبند باشند، به‌طوری که $V(H) \cap V(H') = \emptyset$. در این صورت، داریم:

$$\mathcal{C}(H \odot H') = \{\emptyset\} \cup \left\{ T \cup \left(\bigcup_{v \in T} T_v \right) : \text{در خاصیت } \mathcal{P} \text{ صدق می‌کنند } v \in T \text{ برای هر } T_v \text{ و } T \right\}.$$

از آنجایی که می‌دانیم ایده‌ال‌های به فرم $P_T(K_m, H \odot H')$ که $T \in \mathcal{C}(H \odot H')$، ایده‌ال‌های اول مینیمال ایده‌ال $J_{K_m, H \odot H'}$ هستند، اکنون می‌توانیم ارتفاع و بُعد ایده‌ال یالی دوجمله‌ای تعمیم‌یافته‌ی $H \odot H'$ را برحسب ایده‌ال‌های یالی دوجمله‌ای تعمیم‌یافته‌ی H و H' به‌طور دقیق تعیین نماییم.

گزاره۲. فرض کنید H گرافی همبند با n_1 رأس و H' گرافی همبند با n_2 رأس باشند به‌طوری که $V(H) \cap V(H') = \emptyset$. در این صورت، داریم:

$$ht\, J_{K_m, H \odot H'} = \min \Big\{ htP_T(K_m, H) + \sum_{v \in T} htP_{T_v}(K_m, H'_v) + n_2(m-1)(n_1 - |T|), \\ (m-1)(n_1 + n_1 n_2 - 1) : \text{در خاصیت } \mathcal{P} \text{ صدق می‌کنند } v \in T \text{ برای هر } T_v \text{ و } T \Big\}.$$

اثبات. می‌دانیم که

$$ht\, J_{K_m,H\odot H'} = \min\{htP_U(K_m,H\odot H'): U\in \mathcal{C}(H\odot H')\}.$$

حال، اگر $U\in \mathcal{C}(H\odot H')$، آنگاه طبق گزاره ۱، $U=\emptyset$ یا $U=T\cup(\bigcup_{v\in T}T_v)$ که T و T_v برای هر $v\in T$، در خاصیت $\mathcal{P}$ صدق می‌کنند. اگر $U=\emptyset$، آنگاه طبق رابطه (۱)، داریم:

$$ht\, P_U(k_m,H\odot H') = (m-1)(n_1+n_1n_2-1). \tag{۳}$$

اگر $U=T\cup(\bigcup_{v\in T}T_v)$ که T و T_v برای هر $v\in T$، در خاصیت $\mathcal{P}$ صدق می‌کنند، آنگاه طبق رابطه (۲)، داریم:

$$ht\;\, P_U(K_m,H\odot H') = (m-1)(n_1+n_1n_2-c_{H\odot H'}(U))+|U|. \tag{۴}$$

از طرفی، داریم:

$$c_{H\odot H'}(U) = c_H(T)+\textstyle\sum_{v\in T}c_{H_v}(T_v), \tag{۵}$$

زیرا اگر مجموعه رئوس T را از $H\odot H'$ حذف کنیم، آنگاه به اجتماع مجزای گراف $(H-T)\odot H'$ و $|T|-n_1$ تا کپی از H' می‌رسیم که در آن، $H-T$ گرافی با $c_H(T)$ مولفه‌ی همبندی است. حال، اگر برای هر $v\in T$، مجموعه‌ی رئوس T_v را از هر یک از کپی‌های H' حذف کنیم، از هر یک از آن‌ها به $c_{H_v}(T_v)$ مولفه‌ی همبندی می‌رسیم.

حال، با توجه به اینکه $|U|=|T|+\sum_{v\in T}|T_v|$، با جایگذاری رابطه (۵) در رابطه (۴)، داریم:

$$\begin{aligned}htP_U(K_m,H\odot H') &= (m-1)\big(n_1-c_H(T)\big)+|T|+(m-1)(|T|n_2-\sum_{v\in T}c_{H_v}(T_v))\\ &\quad+\sum_{v\in T}|T_v|+n_2(m-1)(n_1-|T|).\end{aligned} \tag{۶}$$

اما می‌دانیم که

$$ht\, P_T(K_m,H) = (m-1)(n_1-c_H(T))+|T|,$$

و همچنین

$$ht\, P_{T_v}(K_m,H'_v) = (m-1)\left(n_2-c_{H_v}(T_v)\right)+|T_v|.$$

در نتیجه، با جایگذاری دو رابطه‌ی اخیر در رابطه (۶) داریم:

$$\begin{aligned}&htP_U(K_m,H\odot H')\\ &\quad= htP_T(K_m,H)+\sum_{v\in T}ht\, P_{T_v}(K_m,H_v)+n_2(m-1)(n_1-|T|).\end{aligned} \tag{۷}$$

بنابراین، با استفاده از روابط (۳) و (۷) به نتیجه‌ی مطلوب برای $ht\, J_{K_m,H\odot H'}$ می‌رسیم. ■

برای سادگی برای هر گراف G، قرار می‌دهیم $K[G]:=\frac{S_G}{J_{K_m,G}}$.

نتیجه ۱. فرض کنید H گرافی همبند با n_1 رأس و H' گرافی همبند با n_2 رأس باشند به‌طوری که $V(H)\cap V(H')=\emptyset$. در این صورت، داریم:

$$dimK[H\odot H']=\max\{\dim\frac{S_H}{P_T(K_m,H)}+\sum_{v\in T}\dim\frac{S_{H'_v}}{P_{T_v}(K_m,H'_v)}+n_2(n_1-|T|),$$

$$n_1+n_1n_2+m-1: \text{صدق می‌کنند } \mathcal{P} \text{ در خاصیت } v\in T \text{ برای هر } T_v \text{ و } T\}.$$

اثبات. از آنجایی که

$$\dim K\big[x_{ij}:(i,j)\in[m]\times V(H\odot H')\big]=m(n_1+n_1n_2),$$

داریم:

$$\dim K[H\odot H']=m(n_1+n_1n_2)-ht\, J_{K_m,H\odot H'}.$$

بنابراین، طبق گزاره ۲، نتیجه‌ی مورد نظر حاصل می‌شود، زیرا داریم:

$$\dim\frac{S_H}{P_T(K_m,H)}=mn_1-htP_T(K_m,H),$$

و برای هر $v\in T$،

$$\dim\frac{S_{H'_v}}{P_T(K_m,H'_v)}=mn_2-htP_{T_v}(K_m,H'_v),$$

و نهایتاً، به‌وضوح داریم:

$$n_2m(n_1-|T|)-n_2(m-1)(n_1-|T|)=n_2(n_1-|T|).$$

■

یادآوری می‌کنیم که ایده‌ال I از حلقه S را نامخلوط گوییم، هرگاه ارتفاع همه‌ی ایده‌ال‌های اول مینیمال I با هم برابر باشند. با استفاده از گزاره ۲,۳ در [13]، داریم:

گزاره ۳. فرض کنید m,n اعدادی صحیح باشند به‌طوری که $n\geq m\geq 2$. اگر G گرافی n رأسی و همبند باشد، آنگاه گزاره‌های زیر معادل هستند:

۱) $J_{K_m,G}$ نامخلوط است؛

۲) برای هر $T \in \mathcal{C}(G)$، داریم $c_G(T)(m-1) - |T| = m-1$. به ویژه، J_{K_m,K_n} نامخلوط است.

نتیجه ۲. فرض کنید H گرافی کامل n_1 رأسی و H' گرافی همبند n_2 رأسی باشد، به‌طوری که $n_1, n_2 \geq m \geq 2$ و $J_{K_m,H'}$ نامخلوط است. در این صورت

$$\dim K[H \odot H'] = \max\{\frac{S_{H'_v}}{P_{T_v}(K_m, H'_v)} + n_1 + n_1 n_2 + m - 1 - |T|(n_2+1):$$

$T\}$ و T_v برای هر $v \in T$ در خاصیت $\mathcal{P}$ صدق می‌کنند.

در حالت خاص، اگر $m = 2$، آنگاه

$$\dim K[H \odot H'] = n_1 + n_1 n_2 + 1.$$

اثبات. برای $\emptyset \neq T \subseteq V(H)$ و T_v برای هر $v \in T$ که در خاصیت $\mathcal{P}$ صدق می‌کنند، داریم:

$$\begin{aligned}\dim \frac{S_H}{P_T(K_m,H)} &+ \sum_{v\in T} \dim \frac{S_{H'_v}}{P_{T_v}(K_m,H'_v)} + n_2(n_1 - |T|) \\ &= (n_1 + (m-1)c_H(T) - |T|) + (|T|n_2 + (m-1)\sum_{v\in T} c_{H'_v}(T_v) \\ &- \sum_{v\in T}|T_v| + n_2(n_1 - |T|) = n_1 + n_1 n_2 + m - 1 - |T| + |T|(m-1),\end{aligned}$$

که آخرین جمعوند با استفاده از گزاره ۳ و فرض نامخلوط بودن J_{K_m,H'_v} برای هر $v \in T$، در عبارت بالا ظاهر می‌شود. در نتیجه، داریم:

$$\begin{aligned}\dim \frac{S_H}{P_T(K_m,H)} + \sum_{v\in T} \dim \frac{S_{H'_v}}{P_{T_v}(K_m,\mathrm{H'_v})} + n_2(n_1 - |T|) &= n_1 + n_1 n_2 + m - 1 \\ + |T|(m-2) & \\ &\geq n_1 + n_1 n_2 + m - 1,\end{aligned}$$

زیرا $m \geq 2$. بنابراین طبق نتیجه ۱ و از محاسبات بالا، حکم به‌دست می‌آید. ■

نتیجه ۳. فرض کنید $n_1 \geq m \geq 2$ و $n_2 \geq m+1$ اعدادی صحیح باشند. به‌علاوه، فرض کنید G گرافی باشد که از چسباندن هر یک از رئوس گراف کامل K_{n_1} به یک کپی از گراف کامل K_{n_2} به‌دست آمده باشد. در این صورت، داریم:

$$\dim K[G] = n_1(m-1) + n_1 n_2 + 1.$$

در حالت خاص، اگر $m = 2$، آنگاه $\dim K[G] = n_1 + n_1 n_2 + 1$.

اثبات. ابتدا توجه می‌کنیم که G را می‌توان حاصل‌ضرب کورونای $H = K_{n_1}$ و $H' = K_{n_1 - 1}$، یعنی $H \odot H'$ در نظر گرفت. حال، فرض کنید $\emptyset \neq T \subseteq V(H)$.

چون H' کامل است، اگر $T_v \in \mathcal{C}(H')$، آنگاه $T_v = \emptyset$. حال اگر T و T_v، برای هر $v \in T$، دارای $\mathcal{P}$ باشند، آنگاه $T \subset V(H)$، زیرا در غیر این صورت، $N_H(v) = V(H) - \{v\} \subseteq T$ و باید داشته باشیم $T_v \neq \emptyset$ که غیرممکن است. پس با توجه به در نظر گرفتن بیشترین مقدار در نتیجه ۲، یعنی

$$\max\{n_1 + n_1 n_2 + m - 1 + |T|(m-2) : \emptyset \neq T \subset V(H)\},$$

باید $|T| = n_1 - 1$ را نظر بگیریم و در نتیجه، داریم:

$$\begin{aligned}\dim K[G] = \dim[H \odot H'] &= n_1 + n_1 n_2 + m - 1 + (n_1 - 1)(m-2)\\ &= n_1 + n_1 n_2 + (m-2)(n_1 - 1 + 1) + 1 = n_1(m-1) + n_1 n_2 + 1,\end{aligned}$$

و حکم اثبات می‌شود. ■

References

1. Bolognini D, Macchia A, Strazzanti F. Binomial edge ideals of bipartite graphs. European Journal of Combinatorics. **70** (2018), 1-25.

2. Bolognini D, Macchia A, Strazzanti F. Cohen–Macaulay binomial edge ideals and accessible graphs. Journal of Algebraic Combinatorics. (2022), 1-32.

3. Chaudhry F, Dokuyucu A, Irfan R. On the binomial edge ideals of block graphs. Analele ştiinţifice ale Universităţii" Ovidius" Constanţa. Seria Matematică. **24**(2) (2016),149-158.

4. Chaudhry F, Irfan R. On the generalized binomial edge ideals of generalized block graphs. arXiv preprint arXiv:1709.07668. 2017;22.

5. Ene V, Herzog J, Hibi T. Cohen-Macaulay binomial edge ideals. Nagoya Mathematical Journal. **204** (2011), 57-68.

6. Ene V, Herzog J, Hibi T. Koszul binomial edge ideals. InBridging algebra, geometry, and topology 2014 (pp. 125-136). Springer International Publishing.

7. Ene V, Herzog J, Hibi T, Qureshi AA. The binomial edge ideal of a pair of graphs. Nagoya Mathematical Journal. **213** (2014),105-125.

8. Ene V, Zarojanu A. On the regularity of binomial edge ideals. Mathematische Nachrichten. **288**(1) (2015), 19-24.

9. Herzog J, Hibi T, Hreinsdóttir F, Kahle T, Rauh J. Binomial edge ideals and conditional independence statements. Advances in Applied Mathematics. **45**(3) (2010), 317-333.

10. Herzog J, Kiani D, Saeedi Madani S. The linear strand of determinantal facet ideals. Michigan Mathematical Journal. **66**(1) (2017), 107-123.

11. Hochster J, Eagon A, A class of perfect determinantal ideals. Bull. Amer. Math. Soc.**76** (1970), 1026-1029.

12. Kiani D, Saeedi Madani S. Binomial edge ideals with pure resolutions. Collectanea mathematica. **65** (2014), 331-340.

13. Kiani D, Saeedi Madani S. Some Cohen–Macaulay and unmixed binomial edge ideals. Communications in Algebra. **43**(12) (2015), 5434-53.

14. Kiani D, Saeedi Madani S. The Castelnuovo–Mumford regularity of binomial edge ideals. Journal of Combinatorial Theory, Series A.**139** (2016), 80-86.

15. Kumar A. Regularity bound of generalized binomial edge ideal of graphs. Journal of Algebra. **546** (2020), 357-369.

16. Ohtani M. Graphs and ideals generated by some 2-minors. Communications in Algebra. **39**(3) (2011), 905-917.

17. Rauh J. Generalized binomial edge ideals. Advances in Applied Mathematics. **50**(3) (2013), 409-414.

18. Rouzbahani Malayeri M, Saeedi Madani S, Kiani D. A proof for a conjecture on the regularity of binomial edge ideals. Journal of Combinatorial Theory, Series A. **180** (2021),105432.

19. Rouzbahani Malayeri M, Saeedi Madani S, Kiani D. Regularity of binomial edge ideals of chordal graphs. Collectanea Mathematica. **72** (2021), 411-422.

20. Rouzbahani Malayeri M, Saeedi Madani S, Kiani D. Binomial edge ideals of small depth. Journal of Algebra. **572** (2021), 231-244.

21. Rouzbahani Malayeri M, Saeedi Madani S, Kiani D. On the depth of binomial edge ideals of graphs. Journal of Algebraic Combinatorics. **55**(3) (2022), 827-846.

22. Saeedi Madani S, Kiani D. Binomial edge ideals of graphs. the electronic journal of combinatorics. **19**(2) (2012), P44.

23. Saeedi Madani S, Kiani D. On the binomial edge ideal of a pair of graphs. the electronic journal of combinatorics. **20**(1) (2013), P48.

24. Saeedi Madani S, Kiani D. Binomial edge ideals of regularity 3. Journal of Algebra. **515** (2018), 157-172.

25. Shen YH, Zhu G. Generalized binomial edge ideals of complete r -partite graphs. arXiv preprint arXiv:2312.11807. 2023.