Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://jemr.khu.ac.ir/

Attached primes of top local cohomology modules

Sh. Rezaei[1].

1. Department of Mathematics, Payame Noor University, Tehran, Iran. E-mail: Sha.Rezaei@pnu.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 8 March 2021
Received in revised form: 10 April 2021
Accepted: 10 June 2021
Published online: 6 February 2024

Keywords:
Local cohomology modules,
Attached primes.

ABSTRACT

Introduction

Let a be an ideal of Noetherian ring R and M, N be finitely generated R-modules. Recall that, for each $i \geq 0$, i-th generalized local cohomology module M, N with respect to a is defined by

$$H_a^i(M,N) \coloneqq \lim_{\vec{n}} H_a^i(M/a^nM, N).$$

Also, recall that $cd(a, M, N)$, the cohomological dimension of R-modules M and N with respect to an ideal a of a commutative Noetherian ring R is

$$sup\{i \in N_0 : H_a^i(M,N) \neq 0\}.$$

In this paper, we study attached prime ideals of top local cohomology modules. Let R be a Noetherian ring and a be an ideal of R. Let M and N be non-zero finitely generated R-modules. Assume that $pd(M) = d < \infty$, $cd(a, N) = c < \infty$. We will prove that

$$i)\ \left\{p \in Supp_R N:\ cd(a, R/p) = c, \dim \frac{R}{p} = c\right\} \subseteq Att_R(H_a^c(N)),$$

$$ii)\ Att_R(H_a^{d+c}(M,N)) \subseteq \{p \in Supp_R N:\ cd(a, M, R/p) = d + c\},$$

$$iii)\ \left\{p \in Supp_R N : cd\left(a, M, \frac{R}{p}\right) = d + c, \dim \frac{R}{p} = c\right\} \subseteq Att_R(H_a^{d+c}(M,N)).$$

How to cite: Rezaei,Shahram, (2023). Attached Primes of Top Local Cohomology Modules, *Mathematical Researches*, 9 (3), 136 – 146.

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

ایده‌آل‌های اول چسبیدهٔ آخرین مدول ناصفر کوهمولوژی موضعی

شهرام رضایی[1]

۱. گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران. رایانامه: Sha.rezaei@pnu.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۱/۲۰
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۳/۲۵
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۳/۲۸
تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۱۱/۱۷

واژه‌های کلیدی:
مدول‌های کوهمولوژی موضعی،
ایده‌آل‌های اول چسبیده.

چکیده

فرض کنیم a یک ایده‌آل از حلقهٔ نوتری R و M و N دو R- مدول متناهی‌مولد باشند. در این مقاله ایده‌آل‌های اول چسبیدهٔ آخرین مدول ناصفر کوهمولوژی موضعی را بررسی می‌کنیم. در ابتدا ثابت می‌کنیم اگر $cd(a,M)=c<\infty$ آن‌گاه

$$\left\{p\in Supp_R M:\ cd(a,R/p)=\dim\frac{R}{p}=c\right\}\subseteq Att_R(H_a^c(M)).$$

در ادامه ثابت می‌کنیم اگر M یک R- مدول متناهی‌مولد ناصفر با بعد تصویری d و N یک R- مدول متناهی‌مولد ناصفر با بعد کوهمولوژیک c باشد، آن‌گاه

$$Att_R(H_a^{d+c}(M,N))\subseteq\left\{p\in Supp_R N:\ cd\left(a,M,\frac{R}{p}\right)=d+c\right\}$$

و همچنین

$$\left\{p\in Supp_R N:\ cd\left(a,M,\frac{R}{p}\right)=d+c,\dim\frac{R}{p}=c\right\}\subseteq Att_R(H_a^{d+c}(M,N)).$$

همچنین نشان می‌دهیم تساوی $Att_R(H_a^{d+c}(M,N))=Att_R(H_a^c(N))$ تحت شرایطی خاص برقرار است.

استناد: رضایی، شهرام (۱۴۰۲). ایده‌آل‌های اول چسبیدهٔ آخرین مدول ناصفرکوهمولوژی موضعی. *پژوهش‌های ریاضی*، ۹ (۳)، ۱۳۶ -۱۴۶.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

مقدمه

در این مقاله R یک حلقهٔ جابجایی، نوتری و یک‌دار است. a یک ایده‌آل R و M و N دو R- مدول متناهی‌مولد هستند. فانکتور a – تاب $\Gamma_a(-)$ روی رسته R- مدول‌ها به‌صورت،

$$\Gamma_a(M) := \{m \in M : \exists\, t \in \mathbb{N}, a^t m = 0\} = \cup_{n\in\mathbb{N}} (0:_M a^n)$$

تعریف می‌شود. برای هر $i \in \mathbb{N}_0$، i - امین فانکتور مشتق شده راست[1] $\Gamma_a(-)$ را با $H_a^i(-)$ نمایش داده و i- امین فانکتور کوهمولوژی موضعی نسبت به a نامیده می‌شود. R -مدول $H_a^i(M)$ را i- امین مدول کوهمولوژی موضعی M نسبت به ایده‌آل a می‌نامند. برای هر $i \in \mathbb{N}_0$ ، در ([۴]، قضیه ۱ .۳.۸) رابطه زیر اثبات شده است:

$$H_a^i(M) \cong \varinjlim_n Ext_R^i\left(\frac{R}{a^n}, M\right).$$

هرزوگ [۱۱] ، i- امین مدول کوهمولوژی موضعی تعمیم یافته دو مدول M و N نسبت به ایده‌آل a را به‌صورت زیر تعریف کرده است:

$$\mathrm{H}_\mathrm{a}^\mathrm{i}(\mathrm{M},\mathrm{N}) := \varinjlim_\mathrm{n} \mathrm{Ext}_\mathrm{R}^\mathrm{i}(\mathrm{M}/\mathrm{a}^\mathrm{n}\mathrm{M},\mathrm{N}).$$

به ازای $\mathrm{M}=\mathrm{R}$ به‌سادگی می‌توان دید $\mathrm{H}_\mathrm{a}^\mathrm{i}(\mathrm{R},\mathrm{N}) = \mathrm{H}_\mathrm{a}^\mathrm{i}(\mathrm{N})$.

یکی از مسائل مهم در نظریهٔ مدول‌های کوهمولوژی موضعی تعیین مجموعه ایده‌آل‌های اول چسبیدهٔ این مدول‌هاست. تاکنون نتایج متعددی در این رابطه به‌دست آمده است که منابع [۳]، [۵]، [۶] و [۷] برخی از نمونه‌های آن هستند.

اگر M یک R− مدول متناهی مولد ناصفر با بعد کرول متناهی n باشد، بنا به ([۴]، تمرین ۷ .۱.۷) مدول کوهمولوژی موضعی $\mathrm{H}_\mathrm{a}^\mathrm{n}(\mathrm{M})$ آرتینی است و بنا به ([۷]، قضیه ۲.۵)،

$$\mathrm{Att}_\mathrm{R}(\mathrm{H}_\mathrm{a}^\mathrm{n}(\mathrm{M})) = \{\mathrm{p} \in \mathrm{mAss}_\mathrm{R}\mathrm{M} : \mathrm{cd}(\mathrm{a},\mathrm{R}/\mathrm{p}) = \mathrm{n}\}.$$

لازم است یادآوری کنیم که بعد کوهمولوژیک R- مدول M نسبت به ایده‌آل a به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{cd}(\mathrm{a},\mathrm{M}) = \sup\{\mathrm{i} \in \mathrm{N}_0 : \mathrm{H}_\mathrm{a}^\mathrm{i}(\mathrm{M}) \neq 0\}.$$

همچنین بعد کوهمولوژیک R- مدول‌های M و N ، نسبت به ایده‌آل a به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{cd}(\mathrm{a},\mathrm{M},\mathrm{N}) = \sup\{\mathrm{i} \in \mathrm{N}_0 : \mathrm{H}_\mathrm{a}^\mathrm{i}(\mathrm{M},\mathrm{N}) \neq 0\}.$$

برای جزییات بیشتر در رابطه با بعد کوهمولوژیک به [۸] ارجاع می‌دهیم.

در ([۳]، قضیه ۳,۳) قضیهٔ زیر اثبات شده است:

---

[1] Right derived functor

قضیه ۱. فرض کنید M یک $R-$ مدول متناهی‌مولد ناصفر با بعد کوهمولوژیک متناهی c باشد. در این صورت

$$\mathrm{Att}_R H_a^c(M) \subseteq \{p \in \mathrm{Supp}_R M: \mathrm{cd}(a, R/p) = c\}.$$

تاکنون اعضای مجموعهٔ $\mathrm{Att}_R(H_a^c(M))$ به طور دقیق در حالت کلی تعیین نشده است و این مساله که آیا رابطه شمول بالا یک تساوی هست یا خیر، هنوز یک مساله باز است .در این مقاله با بررسی مجموعهٔ $\mathrm{Att}_R(H_a^c(M))$ ، زیرمجموعه‌هایی از آن را به‌دست می‌آوریم. ابتدا ثابت می‌کنیم اگر M یک $R-$ مدول متناهی‌مولد ناصفر باشد و $\mathrm{cd}(a, M) = c < \infty$ آن‌گاه

$$\left\{p \in \mathrm{Supp}_R M:\ \mathrm{cd}(a, R/p) = \dim\frac{R}{p} = c\right\} \subseteq \mathrm{Att}_R(H_a^c(M)).$$

همچنین با فرض $\mathrm{cd}(a, R) = \mathrm{cd}(a, M) = c < \infty$ نشان می دهیم،

$$\left\{p \in \mathrm{Supp}_R M:\ \mathrm{cd}(a, R/p) = c,\ \mathrm{injdim}_{R/p} R/p = c\right\} \subseteq \mathrm{Att}_R(H_a^c(M)).$$

در حالتی که (R, m) یک حلقهٔ نوتری موضعی باشد و M و N دو R- مدول متناهی‌مولد ناصفر باشند به‌طوری‌که $\mathrm{pd}(M) = d$ و $\dim N = n$ ، در ([۵]، قضیه ۳. ۲) رابطه زیر اثبات شده است:

$$\mathrm{Att}_R(H_a^{d+n}(M, N)) = \{p \in \mathrm{Ass}_R N : \mathrm{cd}(a, M, R/p) = d + n\}.$$

در این مقاله حکم فوق را بدون شرط موضعی بودن حلقه بررسی می‌کنیم.

اگر R یک حلقه نوتری (نه لزوما موضعی) باشد و M و N دو R- مدول متناهی‌مولد ناصفر باشند و $\mathrm{pd}(M) = d < \infty$ و $\mathrm{cd}(a, N) = c < \infty$ ، آن‌گاه

i) $\mathrm{Att}_R(H_a^{d+c}(M, N)) \subseteq \{p \in \mathrm{Supp}_R N : \mathrm{cd}(a, M, R/p) = d + c\}$,

ii) $\left\{p \in \mathrm{Supp}_R N : \mathrm{cd}\left(a, M, \frac{R}{p}\right) = d + c, \dim\frac{R}{p} = c\right\} \subseteq \mathrm{Att}_R(H_a^{d+c}(M, N))$.

همچنین نشان می‌دهیم که اگر R یک دامنه نوتری باشد، آن‌گاه تحت شرایطی داریم

$$\mathrm{Att}_R(H_a^{d+c}(M, N)) = \mathrm{Att}_R(H_a^c(N)).$$

۱. نتایج اصلی

ایده‌آل اول p را یک ایده‌آل اول چسبیده به M می‌گویند اگر یک مدول خارج قسمتی از M مانند L به قسمی که $\mathrm{Ann}(L) = p$ وجود داشته باشد. اگر M یک مدول نمایش‌پذیر باشد، تعریف فوق با تعریف رایج ایده‌آل‌های اول چسبیده که با نظریهٔ نمایش بیان می‌شود تطابق دارد ([۱۲]). مجموعه ایده‌آل‌های اول چسبیده به R - مدول M ، با نماد $\mathrm{Att}_R M$ نمایش داده می‌شود.

لم ۲. اگر X یک R- مدول دلخواه باشد، آن‌گاه

$$\mathrm{Att}_R(M \otimes_R X) = \mathrm{Supp}_R M \cap \mathrm{Att}_R X.$$

اثبات. به ([۱]، لم ۱۱. ۲) مراجعه شود.

لم زیر در اثبات برخی نتایج این مقاله مورد استفاده قرار می‌گیرد.

لم ۳. اگر M و N دو $R-$ مدول متناهی مولد ناصفر باشند به‌طوری‌که $\mathrm{pd}(M) = d < \infty$ و L، R- مدول متناهی‌مولد دیگری باشد به‌طوری‌که $\mathrm{Supp}_R N \subseteq \mathrm{Supp}_R L$ ، آن‌گاه $\mathrm{cd}(\mathfrak{a}, M, N) \leq \mathrm{cd}(\mathfrak{a}, M, L)$.

اثبات. به ([۲]، قضیه B) مراجعه شود.

گزارهٔ بعد، یک کران بالا برای بعد کوهمولوژیک مدول‌های کوهمولوژی موضعی تعمیم یافته ارائه می‌دهد.

گزاره ۴. اگر M و N دو $R-$ مدول متناهی مولد ناصفر باشند به‌طوری‌که $\mathrm{pd}(M) = d < \infty$ و $\dim(N) = n < \infty$، آن‌گاه برای هر $i > d + n$ داریم $H^i_{\mathfrak{a}}(M, N) = 0$ و بنابراین $\mathrm{cd}(\mathfrak{a}, M, N) \leq d + n$. به‌عبارتی، اگر $H^{d+n}_{\mathfrak{a}}(M, N) \neq 0$ آن‌گاه $\mathrm{cd}(\mathfrak{a}, M, N) = d + n$.

اثبات. به ([۱۳]، قضیه ۷. ۳) مراجعه شود.

گزاره ۵. اگر M و N دو $R-$ مدول متناهی‌مولد ناصفر باشند و $\mathrm{pd}(M) = d < \infty$ و $\mathrm{cd}(\mathfrak{a}, N) = c < \infty$، آن‌گاه برای هر $i > d + c$ داریم $H^i_{\mathfrak{a}}(M, N) = 0$ و همچنین $H^{d+c}_{\mathfrak{a}}(M, N) \cong \mathrm{Ext}^d_R(M, H^c_{\mathfrak{a}}(N))$.

اثبات. به ([۹]، گزاره ۸. ۲) مراجعه شود.

در گزارهٔ بعد رابطه‌ای بین مجموعه ایده‌آل‌های اول چسبیده‌ی مدول‌های کوهمولوژی موضعی اثبات می‌کنیم.

گزاره ۶. اگر M و N دو $R-$ مدول متناهی‌مولد ناصفر باشند که $\mathrm{pd}(M) = d < \infty$ و $\mathrm{cd}(\mathfrak{a}, N) = c < \infty$ آن‌گاه

$$\mathrm{Att}_R H^{d+c}_{\mathfrak{a}}(M, N) = \mathrm{Supp}_R(\mathrm{Ext}^d_R(M, R)) \cap \mathrm{Att}_R H^c_{\mathfrak{a}}(N)$$

و در نتیجه $\mathrm{Att}_R H^{d+c}_{\mathfrak{a}}(M, N) \subseteq \mathrm{Att}_R H^c_{\mathfrak{a}}(N)$.

اثبات. بنابر گزارهٔ ۵ داریم، $H^{d+c}_{\mathfrak{a}}(M, N) \cong \mathrm{Ext}^d_R(M, H^c_{\mathfrak{a}}(N))$. چون فانکتور $\mathrm{Ext}^d_R(M, -)$ دقیق راست است، نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} H^{d+c}_{\mathfrak{a}}(M, N) &\cong \mathrm{Ext}^d_R\big(M, H^c_{\mathfrak{a}}(N)\big) \\ &\cong \Big(\mathrm{Ext}^d_R(M, R) \otimes_R H^c_{\mathfrak{a}}(N)\Big). \end{aligned}$$

اکنون با استفاده از لم ۲ داریم:

$$\mathrm{Att}_R H_a^{d+c}(M,N) = \mathrm{Supp}_R(\mathrm{Ext}_R^d(M,R)) \cap \mathrm{Att}_R H_a^c(N).$$

رابطهٔ بالا نشان می‌دهد که $\mathrm{Att}_R H_a^{d+c}(M,N) \subseteq \mathrm{Att}_R H_a^c(N)$.

در قضیهٔ بعد که اولین نتیجه اصلی این مقاله است، زیرمجموعه‌ای از مجموعه $\mathrm{Att}_R H_a^{cd(a,M)}(M)$ را به‌دست می‌آوریم.

قضیه ۷. اگر M یک $R-$ مدول متناهی‌مولد ناصفر باشد و $cd(a,M) = c < \infty$ آن‌گاه

$$\left\{p \in \mathrm{Supp}_R M\colon\ cd(a, R/p) = \dim\frac{R}{p} = c\right\} \subseteq \mathrm{Att}_R(H_a^c(M)).$$

اثبات. فرض کنید $p \in \mathrm{Supp}_R M$، $cd(a,R/p) = c$ و $\dim\frac{R}{p} = c$. همچنین، در ابتدا فرض کنید

$$cd(a,M) = cd(a,R) = c.$$

بنابراین فانکتور $H_a^c(-)$ دقیق راست است و بنا به لم ۲، داریم

$$\mathrm{Att}_R H_a^c(M) = \mathrm{Supp}_R M \cap \mathrm{Att}_R H_a^c(R).$$

در نتیجه $H_a^c(R/p) \neq 0$ و بنابراین یک ایده‌آل اول مانند q وجود دارد به‌طوری‌که $q \in \mathrm{Att}_R(H_a^c(R/p))$ و لذا بنا به قضیهٔ ۱ داریم $cd(a,R/q) = c$.

از طرف دیگر $p \subseteq \mathrm{Ann}_R(H_a^c(R/p)) \subseteq \bigcap_{q \in \mathrm{Att}_R(H_a^c(R/p))} q$ و بنابراین $p \subseteq q$. اما

$$c = cd(a,R/q) \leq \dim\frac{R}{q} \leq \dim\frac{R}{p} = c$$

پس $q = p$ و بنابراین $p \in \mathrm{Att}_R(H_a^c(R/p))$. اما از دنباله دقیق $0 \to p \to R \to R/p \to 0$ بروریختی زیر به‌دست می‌آید:

$$H_a^c(R) \to H_a^c(R/p) \to 0$$

که نتیجه می‌دهد $p \in \mathrm{Att}_R H_a^c(R)$. اکنون از تساوی $\mathrm{Att}_R H_a^c(M) = \mathrm{Supp}_R M \cap \mathrm{Att}_R H_a^c(R)$ نتیجه می‌شود که $p \in \mathrm{Att}_R H_a^c(M)$ و در این حالت قضیه برقرار است.

حال فرض کنید $c = cd(a,M) \neq cd(a,R)$.

قرار دهید $b := \mathrm{Ann}_R M$. بنا به لم ۳، $c = cd(a,M) = cd(a,R/b)$. از طرفی، بنا به قضیه استقلال ([۴]، قضیه ۴.۲.۱)، برای هر عدد صحیح $i \geq 0$ داریم $H_a^i(M) \cong H^i_{a(\frac{R}{b})}(M)$ در نتیجه

$$cd(a,M) = cd(a(R/b),M) = cd(a(R/b),R/b).$$

چون $p \in \mathrm{Supp}_R M$ پس $p(\frac{R}{b}) \in \mathrm{Supp}_{R/b} M$ و چون $H_a^i(R/p) \cong H^i_{a(\frac{R}{b})}(R/p)$ برای هر عدد صحیح $i \geq 0$

پس $\mathrm{cd}\left(a(\frac{R}{b}), R/p\right) = c$. بنابراین،

$$p(\frac{R}{b}) \in \left\{p(\frac{R}{b}) \in \mathrm{Supp}_{R/b}M:\ \mathrm{cd}\left(a(\frac{R}{b}), R/p\right) = \dim \frac{R/b}{p(\frac{R}{b})} = c\right\}.$$

لذا بنا به استدلال حالت اول برای حلقه $\frac{R}{b}$ نتیجه می‌شود که

$$p\left(\frac{R}{b}\right) \in \mathrm{Att}_{\frac{R}{b}} H^c_{a(\frac{R}{b})}(M).$$

بنابراین $p \in \mathrm{Att}_R(H^c_{a(\frac{R}{b})}(M))$. اکنون یکریختی $H^i_a(M) \cong H^i_{a(\frac{R}{b})}(M)$ نتیجه می‌دهد $p \in \mathrm{Att}_R(H^c_a(M))$.

گزاره ۸. فرض کنید R یک دامنه صحیح نوتری و a ایده‌آل ناصفری از حلقه‌یR باشد. اگر M ، $R-$ مدول ناصفری باشد به‌طوری‌که $0 \le \mathrm{injdim}(M) = t < \infty$ و $\mathrm{cd}(a, M) = \mathrm{injdim}(M)$ آن‌گاه $\mathrm{Ann}_R H^t_a(M) = 0$.

اثبات. به ([۱۰]، قضیه ۱. ۱) مراجعه شود.

لم ۹. فرض کنید $\mathrm{cd}(a, R) = c < \infty$ و p ایده‌آل اولی باشد به‌طوری‌که $\mathrm{cd}(a, R/p) = \mathrm{injdim}_{R/p}R/p = c$ دراینصورت $p \in \mathrm{Att}_R H^c_a(R)$.

اثبات. بنا به قضیهٔ استقلال ([۴]، قضیه ۲.۱. ۴) ، $\mathrm{cd}\left(a(\frac{R}{p}), R/p\right) = \mathrm{cd}(a, R/p)$. بنابراین $\mathrm{cd}\left(a\left(\frac{R}{p}\right), \frac{R}{p}\right) = \mathrm{injdim}_{\frac{R}{p}}(\frac{R}{p}) = c$ و از گزاره ۸ نتیجه می‌شود که $\mathrm{Ann}_{R/p}(H^c_{a(\frac{R}{p})}(R/p)) = 0$. لذا $\mathrm{Ann}_R H^c_a(R/p) = p$ که نشان می‌دهد $p \in \mathrm{Att}_R H^c_a(R/p)$.

از طرف دیگر، از دنباله دقیق $\cdot \to p \to R \to R/p \to \cdot$ بروریختی زیر به دست می‌آید:

$$H^c_a(R) \to H^c_a(R/p) \to \cdot$$

که نتیجه می‌دهد $p \in \mathrm{Att}_R H^c_a(R)$.

قضیهٔ بعد، دومین نتیجه اصلی این مقاله است.

قضیه ۱۰. اگر M یک R- مدول متناهی مولد ناصفر باشد به‌طوری‌که $c = \mathrm{cd}(a, R) = \mathrm{cd}(a, M) < \infty$ ، آن‌گاه

$$\left\{p \in \mathrm{Supp}_R M:\ \mathrm{cd}\left(a, \frac{R}{p}\right) = \mathrm{injdim}_{R/p}R/p = c\right\} \subseteq \mathrm{Att}_R(H^c_a(M)).$$

اثبات. فرض کنید $p \in \mathrm{Supp}_R M$ و $\mathrm{cd}(a, R/p) = c$ و $\mathrm{injdim}_{R/p}R/p = c$. چون فانکتور $H^c_a(-)$ دقیق راست است، نتیجه می‌شود:

$$H_a^c(M) \cong M \otimes_R H_a^c(R).$$

پس با استفاده از لم ۲ داریم:

$$\mathrm{Att}_R H_a^c(M) = \mathrm{Supp}_R M \cap \mathrm{Att}_R H_a^c(R).$$

اما از لم ۹ نتیجه می‌شود که $p \in \mathrm{Att}_R H_a^c(R)$ و چون فرض شد که $p \in \mathrm{Supp}_R M$ تساوی بالا نشان می‌دهد که $p \in \mathrm{Att}_R H_a^c(M)$.

لم زیر برای اثبات قضیه بعد نیاز است .

لم ۱۱. فرض کنید M و N دو $R-$ مدول متناهی‌مولد ناصفر باشند به‌طوری‌که $\mathrm{pd}(M) = d < \infty$ و $\mathrm{cd}(a, N) = c < \infty$. در اینصورت برای هر $p \in \mathrm{Supp}_R N$ به‌طوری‌که $\mathrm{cd}(a, M, R/p) = d + c$ داریم $\mathrm{cd}(a, R/p) = c$.

اثبات. چون $p \in \mathrm{Supp}_R N$ بنابراین $\mathrm{Supp}_R R/p \subseteq \mathrm{Supp}_R N$ و از لذا بنابه لم ۳، $\mathrm{cd}(a, R/p) \leq \mathrm{cd}(a, N)=c$. اگر $\mathrm{cd}(a, R/p) < c$ آن‌گاه از گزارهٔ ۵ نتیجه می‌شود $H_a^{d+c}(M, R/p) = 0$. اما این تساوی با فرض $\mathrm{cd}(a, M, R/p) = d + c$ تناقض دارد. بنابراین $\mathrm{cd}(a, R/p) = c$.

قضیه ۱۲. اگر M و N دو $R-$ مدول متناهی‌مولد ناصفر باشند به‌طوری‌که $\mathrm{pd}(M) = d < \infty$ و $\mathrm{cd}(a, N) = c < \infty$، آن‌گاه

$$\left\{p \in \mathrm{Supp}_R N:\ \mathrm{cd}\left(a, M, \frac{R}{p}\right) = d + c, \dim\frac{R}{p} = c\right\} \subseteq \mathrm{Att}_R(H_a^{d+c}(M, N)).$$

اثبات. فرض کنید p ایده‌آل اولی باشد به‌قسمی‌که $p \in \mathrm{Supp}_R N$ ، $\mathrm{cd}(a, M, R/p) = d + c$ و $\dim\frac{R}{p} = c$. در اینصورت از لم ۱۱ نتیجه می‌شود که $\mathrm{cd}(a, R/p) = c$ و بنا به قضیهٔ ۷، $p \in \mathrm{Att}_R(H_a^c(N))$. از طرف دیگر چون $\mathrm{cd}\left(a, M, \frac{R}{p}\right) = d + c$ نتیجه می‌شود $H_a^{d+c}(M, R/p) \neq 0$ و بنابراین دست‌کم یک ایده‌آل اول مانند q به‌طوری‌که $q \in \mathrm{Att}_R(H_a^{d+c}(M, R/p))$ وجود دارد. همچنین، بنا به گزارهٔ ۶ ،

$$\mathrm{Att}_R H_a^{d+c}(M, R/p) = \mathrm{Supp}_R(\mathrm{Ext}_R^d(M, R)) \cap \mathrm{Att}_R H_a^c(R/p).$$

پس $q \in \mathrm{Supp}_R(\mathrm{Ext}_R^d(M, R))$ و $q \in \mathrm{Att}_R H_a^c(R/p)$. چون $\dim\frac{R}{p} = c$ و $q \in \mathrm{Att}_R H_a^c(R/p)$ با استدلالی شبیه آنچه در برهان قضیهٔ ۷ دیدیم نتیجه می‌شود که $q = p$. پس

$$p \in \mathrm{Supp}_R(\mathrm{Ext}_R^d(M, R)) \cap \mathrm{Att}_R H_a^c(N).$$

از طرف دیگر بنا به گزارهٔ ۶ ،

$$\mathrm{Att}_R H_a^{d+c}(M, N) = \mathrm{Supp}_R(\mathrm{Ext}_R^d(M, R)) \cap \mathrm{Att}_R H_a^c(N).$$

بنابراین از روابط بالا نتیجه می‌شود $p \in \mathrm{Att}_R(H_a^{d+c}(M, N))$.

قضیهٔ بعد، تعمیم قضیهٔ ۱ برای مدول‌های کوهمولوژی موضعی تعمیم یافته است.

قضیه ۱۳. اگر M و N دو $R-$ مدول متناهی‌مولد ناصفر باشند به‌طوری‌که $\mathrm{pd}(M)=d<\infty$ و $\mathrm{cd}(a,N)=c<\infty$ آن‌گاه

$$\mathrm{Att}_R(H_a^{d+c}(M,N))\subseteq\{p\in \mathrm{Supp}_R N:\ \mathrm{cd}(a,M,R/p)=d+c\}.$$

اثبات. اگر $H_a^{d+c}(M,N)=0$ آن‌گاه $\mathrm{Att}_R(H_a^{d+c}(M,N))=\varnothing$ و بنابراین حکم قضیه در این حالت برقرار است. فرض می‌کنیم $H_a^{d+c}(M,N)\neq 0$ و $p\in \mathrm{Att}_R(H_a^{d+c}(M,N))$. بنا به گزارهٔ ۶، تساوی زیر برقرار است:

$$\mathrm{Att}_R H_a^{d+c}(M,N)=\mathrm{Supp}_R(\mathrm{Ext}_R^d(M,R))\cap \mathrm{Att}_R H_a^c(N)$$

و بنا به قضیهٔ ۱،

$$\mathrm{Att}_R(H_a^c(N))\subseteq\{p\in \mathrm{Supp}_R N:\ \mathrm{cd}(a,R/p)=c\}.$$

پس $p\in \mathrm{Supp}_R(\mathrm{Ext}_R^d(M,R))$، $p\in \mathrm{Supp}_R N$ و $\mathrm{cd}(a,R/p)=c$. چون $\mathrm{cd}(a,R/p)=c$ نتیجه می‌شود $H_a^c(R/p)\neq 0$، لذا یک ایده‌آل اول q وجود دارد که $q\in \mathrm{Att}_R(H_a^c(R/p))$. چون $p\subseteq \mathrm{Ann}_R(H_a^c(R/p))$ و بنا به ([۳]، لم ۲. ۳)، $\mathrm{Ann}_R(H_a^c(R/p))\subseteq \bigcap_{q\in \mathrm{Att}_R(H_a^c(R/p))} q$، نتیجه می‌شود $p\subseteq q$.

از طرف دیگر $p\in \mathrm{Supp}_R(\mathrm{Ext}_R^d(M,R))$ و $\mathrm{Ext}_R^d(M,R)$ متناهی‌مولد است و بنابراین نتیجه می‌شود $q\in \mathrm{Supp}_R(\mathrm{Ext}_R^d(M,R))$. پس

$$q\in \mathrm{Supp}_R(\mathrm{Ext}_R^d(M,R))\cap \mathrm{Att}_R(H_a^c(R/p))=\mathrm{Att}_R H_a^{d+c}(M,R/p).$$

به عبارت دیگر $\mathrm{Att}_R H_a^{d+c}(M,R/p)\neq\emptyset$ و در نتیجه $H_a^{d+c}(M,R/p)\neq 0$. این رابطه نشان می‌دهد

$$\mathrm{cd}(a,M,R/p)=d+c$$

و حکم حاصل می‌شود.

نتیجه ۱۴. فرض کنید (R,m) یک حلقهٔ نوتری موضعی باشد و M و N دو $R-$ مدول متناهی‌مولد ناصفر باشند به‌طوری‌که که $\mathrm{pd}(M)=d<\infty$ و $0<\mathrm{cd}(a,N)=c<\infty$. دراینصورت اگر $H_a^{d+c}(M,N)\neq 0$، آن‌گاه $H_a^{d+c}(M,N)$ یک $R-$ مدول با طول متناهی نیست.

اثبات. فرض کنید $H_a^{d+c}(M,N)$ یک $R-$ مدول با طول متناهی باشد. در اینصورت بنابر ([۴]، نتیجه ۱۲. ۲. ۷)، $m\in \mathrm{Att}_R H_a^{d+c}(M,N)$. لذا از قضیهٔ ۱۳ داریم، $\mathrm{cd}(a,M,R/m)=d+c$. از طرف دیگر، طبق گزارهٔ ۴ داریم $\mathrm{cd}(a,M,R/m)\leq d$ که یک تناقض است.

قضیه ۱۵. فرض کنید R یک دامنه صحیح نوتری و موضعی از بعد n و M و N دو $R-$ مدول متناهی‌مولد ناصفر باشند به‌طوری‌که $\mathrm{pd}(M)=d<\infty$ و $\mathrm{cd}(a,N)=c<\infty$. در اینصورت اگر $H_a^{d+n}(M,R)\neq 0$ آن‌گاه

$$\mathrm{Att}_R(H_a^{d+c}(M,N)) = \mathrm{Att}_R H_a^c(N).$$

اثبات. بنا به ([۵]، قضیه ۳. ۲) داریم،

$$\mathrm{Att}_R H_a^{d+n}(M,R) = \{p \in \mathrm{Ass}_R R:\ cd(a,M,R/p) = d+n\}.$$

از فرض $H_a^{d+n}(M,R) \neq 0$ و گزارهٔ ۴ نتیجه می‌شود $cd(a,M,R) = d+n$ و بنابراین تساوی بالا نشان می‌دهد که $0 \in \mathrm{Att}_R(H_a^{d+n}(M,R))$. اما بنا به گزارهٔ ۶ ، تساوی زیر برقرار است:

$$\mathrm{Att}_R H_a^{d+n}(M,R) = \mathrm{Supp}_R(\mathrm{Ext}_R^d(M,R)) \cap \mathrm{Att}_R H_a^n(R)$$

و بنابراین $0 \in \mathrm{Supp}_R(\mathrm{Ext}_R^d(M,R))$ و در نتیجه $\mathrm{Supp}_R(\mathrm{Ext}_R^d(M,R)) = \mathrm{Spec}\, R$. حال با استفاده مجدد از گزارهٔ ۶ داریم

$$\mathrm{Att}_R H_a^{d+c}(M,N) = \mathrm{Supp}_R(\mathrm{Ext}_R^d(M,R)) \cap \mathrm{Att}_R H_a^n(N).$$

بنابراین $\mathrm{Att}_R(H_a^{d+c}(M,N)) = \mathrm{Att}_R H_a^c(N)$.

قضیه ۱۶. فرض کنید R یک دامنه صحیح نوتری موضعی باشد و همچنین M و N دو $R-$ مدول متناهی‌مولد ناصفر باشند به‌طوری‌که $pd(M) = d < \infty$ و $0 \leq \mathrm{injdim}_R N = t < \infty$. دراینصورت اگر $cd(a,M,N) = d+t$ آن‌گاه

$$\mathrm{Att}_R(H_a^{d+t}(M,N)) = \mathrm{Att}_R H_a^t(N).$$

اثبات. بنا به ([۱۰]، قضیه ۶. ۲) داریم $\mathrm{Ann}_R(H_a^{d+t}(M,N)) = 0$، در نتیجه $0 \in \mathrm{Att}_R(H_a^{d+t}(M,N))$. اکنون تساوی

$$\mathrm{Att}_R H_a^{d+t}(M,N) = \mathrm{Supp}_R(\mathrm{Ext}_R^d(M,R)) \cap \mathrm{Att}_R H_a^t(N)$$

نشان می‌دهد $0 \in \mathrm{Supp}_R(\mathrm{Ext}_R^d(M,R))$ و در نتیجه $\mathrm{Supp}_R(\mathrm{Ext}_R^d(M,R)) = \mathrm{Spec}\, R$. لذا از تساوی بالا نتیجه می‌گیریم $\mathrm{Att}_R(H_a^{d+t}(M,N)) = \mathrm{Att}_R H_a^t(N)$ و برهان کامل می‌شود.

تشکر و قدردانی

از داوران محترم مجله که نظرات ارزندهٔ آنان موجب اصلاحات مفید برای این مقاله گردید، نهایت تشکر و قدردانی را دارم.

References

1. M. Aghapournahr, L. Melkersson, Cofiniteness and coassociated primes of local cohomology modules, Math. Scand. **105** (2009), 161-170.
2. J. Amjadi, R. Naghipour, Cohomological dimension of Generalized local cohomology modules,

Algebra Colloquium, **15** (2008), 303-308..

3. A. Atazadeh, M. Sedghi, R. Naghipour, On the annihilators and attached primes of top local cohomology modules, Archiv der Math, **102** (2014), 225-236.
4. M. Brodmann and R. Y. Sharp, Local cohomology: an algebraic introduction with geometric applications, Cambridge Univ. Press, 1998.
5. Y. G, L. Chu, Attached primes of the top generalized local cohomology modules, Bull. Aust. Math., **79** (2009), 59-67.
6. M. T. Dibaei, S. Yassemi, Attached primes of the top local cohomology modules with respect to an ideal, Arch. Math. **84** (2005), 292- 297.
7. K. Divaani-Azar, Vanishing of the top local cohomology modules over Noetherian rings, Proc. Indian Acad. Sci. **119** (2009), 23-35..
8. K. Divaani-Aazar, R. Naghipour, M. Tousi, Cohomological dimension of certain algebraic varieties, Proc. Amer. Math. Soc., **130** (2002), 3537-3544.
9. S. H. Hasanzadeh, A. Vahidi, On vanishing and cofiniteness of generalized local cohomology modules, Comm. Algebra **37** (2009), 2290-2299.
10. M. Hasanzad, J. Azami, A short note on annihilators of local cohomology modules, J. Algebra and its Appl. **171** (2020), 2050061-67.
11. J. Herzog, Komplex Auosungen und Dualitat in der lokalen algebra, Universitut Regensburg, 1974**.**
12. I. G. Macdonald, Secondary representations of modules over a commutative rings, Symap. Math. (1973) 23-41.
13. S. Yassemi, Generalized section functors, J. Pure. Apple. Algebra, **95** (1994), 103-119.